Мамаева И.А.

Физика

Практикум
Часть 1. Механика

Мамаева И.А. Физика. Практикум. Ч.1.Механика.

В практикуме представлен материал, предназначенный для оказания помощи в обучении решению физических задач студентам инженерных направлений подготовки.

Особенностью предлагаемого практикума является нацеленность на изучение физических явлений и методов исследования явлений на теоретическом уровне, которые находят отражение в формулировании обобщенных подходов к решению задач. Практикум отличается достаточно высокой степенью обобщения и систематизации методов решения физических задач определенного класса.

Практикум может быть использован студентами при подготовке к практическим занятиям по физике и для самостоятельного решения типовых задач профессиональной деятельности. Практикум может быть использован преподавателями вузов для проведения практических занятий. Практикум может быть полезен тем, кто интересуется методами решения физических задач.

Таблица Вв.1. ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ 7
Таблица 1. ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО РАЗДЕЛУ 12
Таблица 2. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 16
Таблица 1.3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА 35
Таблица 1.4. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА 40
Таблица 1.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ 44
Таблица 1.6. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА .... **Ошибка! Закладка не определена.**
Таблица 1.7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ ПРИ ВРАЩЕНИИ .... **Ошибка! Закладка не определена.**

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ... 4

ЦЕЛЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ФИЗИКЕ ....**ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.**
ОСОБЕННОСТЬ ПРЕДЛАГАЕМОГО КОНСПЕКТА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ФИЗИКЕ .... **ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.**
ФИЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА И ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ..6
ОФОРМЛЕНИЕ КРАТКОЙ ЗАПИСИ УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ 9

ИЗУЧАЕМ МЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ.. 11

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ (КИНЕМАТИКА) 14
Практическое занятие №1А. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела 14
Практическое занятие №1В. Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела 34
ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ (ДИНАМИКА)............................37
Практическое занятие №2А. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела (законы Ньютона) 37
Практическое занятие №2В. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела (теорема об изменении кинетической энергии, закон сохранения энергии) 41
Практическое занятие №2С. Взаимодействие поступательно движущихся тел ***Ошибка! Закладка не определена.***
ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ (ДИНАМИКА) 44
Практическое занятие №3А. Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела (основной закон динамики вращательного движения) 44
Практическое занятие №3В. Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела (теорема об изменении кинетической энергии, закон сохранения энергии) ....***Ошибка! Закладка не определена.***
Практическое занятие №3С. Взаимодействие вращающихся тел. Движение и взаимодействие тел, вращающихся и движущихся поступательно ....***Ошибка! Закладка не определена.***

ОБОБЩАЕМ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ...... ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.

Условия и особенности применения законов кинематики и динамики к решению задач .... ***Ошибка! Закладка не определена.***
Обобщение и систематизация методов решения задач...................***Ошибка! Закладка не определена.***
Общий подход к решению задач..***Ошибка! Закладка не определена.***

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ САМОСТОЯТЕЛЬНО .... ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.

Задачи для самостоятельного решения ....***Ошибка! Закладка не определена.***
Задания для индивидуальной расчетно-графической работы ....***Ошибка! Закладка не определена.***

ПРИЛОЖЕНИЕ .... ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ФИЗИКЕ ....**ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.**
ОБОБЩЕННЫЕ ПЛАНЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ФИЗИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ.............**ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.**

Введение

Представленный в практикуме учебный материал помогает более глубоко понять сущность физических явлений, познакомиться с общими подходами к решению физических задач и научиться применять методы решения задач определенного класса.

Особенностью предлагаемого практикума является нацеленность на изучение физических явлений и методов исследования явлений, которые находят отражение в формулировании обобщенных подходов к решению задач. Практикум отличается достаточно высокой степенью обобщения и систематизации методов решения задач. Ключевыми понятиями в обобщенных подходах являются такие методологические категории, как объект, явление, закон, величины, модель. Овладение данным подходом позволяет в практической деятельности успешнее подбирать модели объекта и явления и эффективнее решать профессиональные задачи.

Особенностью предлагаемого пособия является то, что *содержание его акцентирует внимание на изучаемых <u>физических явлениях</u> и <u>методах исследования физических явлений</u> на теоретическом уровне. Под методами исследования явлений на теоретическом уровне понимается формулирование обобщенных подходов к решению задач, обобщение и систематизация методов решения физических задач определенного класса и анализ условий и результатов применения этих методов к решению задач*.

Отметим, что изучить все методы, научиться решать любые физические задачи невозможно за то время, которое отводится на практические занятия в вузе. Поэтому в рамках этих занятий предполагается изучить *обобщенные подходы*, применяемые к решению физических задач *определенного* класса, изучить *конкретные* методы решения *определенных* задач – задач, объединяемых в класс по какому-либо признаку. При этом будем считать, что *важно не только научиться получать количественный* *результат, но и научиться представлять* получаемые в результате решения *физические зависимости в аналитическом и графическом виде*.

Практикум может оказать помощь в подготовке к практическим занятиям по физике, а также при самостоятельном изучении методов решения задач.

Физические знания являются компонентом грамотности современного инженера! Поэтому, курсу физики отводится особая роль в подготовке будущих инженеров.

Курс физики традиционно изучается в рамках проведения лекций, практических занятий и лабораторного практикума. Общие ЦЕЛИ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ при обучении физике:

1. На теоретическом, практическом и экспериментальном уровнях – ИЗУЧИТЬ ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ (СВОЙСТВА МАТЕРИИ) И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ (методы описания, объяснения, предсказания) В РАМКАХ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ И МЕТОДОЛОГИИ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ.
2. На теоретическом и практическом уровнях – ОВЛАДЕТЬ ОПРЕДЕЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ И ПРИЕМАМИ РЕШЕНИЯ КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ ФИЗИКИ.
3. На теоретическом, практическом и экспериментальном уровнях – ОВЛАДЕТЬ МЕТОДОЛОГИЕЙ ПРОВЕДЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА в рамках методологии научного исследования, ИЗУЧИТЬ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ, ОЗНАКОМИТЬСЯ С ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ АППАРАТУРОЙ.

Почему необходимо при изучении физики изучить методы исследования явлений на теоретическом, практическом и экспериментальном уровнях (пункт 1)? Потому что, для студентов – будущих инженеров – важно не только научиться оперировать системой физических знаний (теоретически), но и научиться использовать приобретенные знания при решении практических и экспериментальных задач, *для инженера важно уметь находить практическое применение теоретическим идеям*.

В будущем приобретенные знания и умения помогут осуществить переход от методов исследования *физических* явлений к методам исследования *технических* явлений. Поэтому знание методов исследования *физических* явлений на практическом и экспериментальном уровнях представляет собой особую ценность для инженерного образования.

На изучение физических явлений нацелены лекции, практические занятия и лабораторный практикум. При этом, можно считать, что примерно третья часть учебной деятельности студента отводится на практические занятия, т.е. посвящена изучению методов решения задач. Почему? Потому что решение задачи как процесс – это способ глубже понять физическое явление, а решение задачи как результат процесса (как приобретенное умение) показывает, насколько успешным является изучение физики. Отметим, что для того, чтобы быть успешным, недостаточно разобрать решение одной задачи по одной теме практического занятия, необходимо научиться обобщать и анализировать подходы к решению ряда задач, отнесенных к данному классу. Оказать помощь в этом и призвано данное учебно-методическое пособие.

Физическая задача и обобщенный подход к ее решению

Для ответа на вопросы, что такое физическая задача и на что необходимо обращать внимание, изучая методы решения задач, используем специальные материалы[1], подкорректировав их применительно к практическим занятиям в вузе.

Физическая задача – это особая форма описания физического **явления** через конкретно заданную ситуацию или абстрактно представленную. Поэтому, читая текст задачи, необходимо проанализировать, о каком **явлении** идет речь и выяснить, какие параметры (характеристики, **величины**) явления заданы, а какие параметры требуется определить. Только после этого можно сделать краткую запись условия задачи и ее требования в знаковой форме (в любой задаче необходимо различать ее условие и требование!).

В обобщенном подходе к решению задачи (см. таблицу ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ[2]) можно выделить основные

[1] А.В. Усова «Практикум по решению физических задач»: Для студентов физ.-мат.фак./ А.В.Усова, Н.Н. Тулькибаева. 2-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 206с

[2] Таблица сформирована на основе табл.11 пособия А.В. Усовой «Практикум по решению физических задач»: Для студентов физ.-мат.фак./ А.В.Усова, Н.Н. Тулькибаева. 2-е изд. – М.: Просвещение, 2001.

четыре действия, осуществляемые при решении любой физической задачи. Они занесены в таблицу в столбец под заголовком «Действие». В чем заключается каждое из этих действий описано в столбце таблицы под заголовком «В чем заключается действие».

Таблица Вв.1. ОБОБЩЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Действие	**В чем заключается действие**
1.Выделение явления	1.1. Чтение задачи, *выделение физического явления*, о котором идет речь в задаче, повторное чтение задачи. 1.2. *Выбор модели* явления (объекта) и способа ее описания. 1.3. *Выделение условия* и *требования* и их краткая запись.
2.Составление плана решения	2.1. *Рассмотрение условия и требования в тексте задачи с целью определения, какие методы (подходы) могли бы позволить решить задачу*. 2.2. *Выбор метода (методов) решения задачи с указанием особенностей применения метода к* исследованию выбранной модели явления.
3.Решение	3.1. *Применение метода (методов) решения* и *определение соотношения между величинами требования и условия* задачи. 3.2. *Вычисление значений искомых величин*.
4.Проверка полученного результата	4.1. *Уточнение, выполнено ли требование задачи*. 4.2. *Выбор метода проверки результата*. 4.3. *Проверка правильности полученного результата*.

Как видно из этой таблицы, прежде, чем рассуждать о методе решения задачи, необходимо понимать:

1. В чем заключается изучаемое физическое **явление**, каковы условия и особенности его существования (п.1.1-п.1.2 табл. Вв.-1)? Отвечая на эти вопросы по существу, мы описываем **модель** явления, которую можно дополнить графическим изображением явления (схематичным рисунком) для более наглядного представления.

2) Каковы характеристики явления, т.е. каковы **величины**, которые могут дать количественную оценку явлению? Отвечая на этот вопрос, можно верно отразить условие и требование задачи (п.1.3 табл. Вв.-1).

3) Какие **законы** описывают закономерности данного явления и могут быть применены для решения задачи, на основе какого **закона** может быть построен **метод** решения задачи? Отвечая на эти вопросы, мы можем выбрать **метод** решения и спланировать решение задачи (п.2.2-2.3 табл. Вв.-1).

В пунктах 1), 2), 3) отражен определенный «сценарий», по которому может происходить решение задачи. В нем отражен подход к практическому исследованию явления, что проиллюстрировано на рис.Вв-1. Стрелки условно показывают, в какой последовательности меняется предмет исследования. Например, стрелка 1 показывает, что на первом этапе мы описываем **величины** рассматриваемого **явления**, стрелка 2 – описываем **законы** рассматриваемого **явления**, стрелка 3 – с помощью **метода** или методов описываем (исследуем) **явление**. Последовательность укладки «кирпичиков» «**Величины**», «**Законы**», «**Методы**» на рис.Вв-1 показывает, знание каких элементов является основанием для перехода на «следующий уровень» понимания сущности явления, т.е. знание **величин** – это основа для применения **законов**, знание **законов** – основа для разработки **метода** решения задачи.

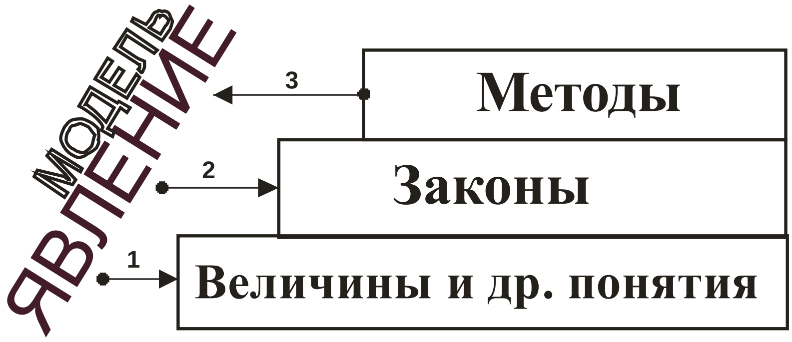


Рисунок Вв-1. Процесс изучения физического явления на практических занятиях

После применения выбранного **метода** к решению задачи, т.е. выполнения запланированных действий и получения результата (п.3.1-п.3.2 табл. Вв.-1) осуществляется проверка правильности расчетов (п.4.1-п.4.3 в табл. Вв.-1), при этом метод проверки полученного результата может быть разным.

Важно! Для того, чтобы научиться применять конкретные **методы** к решению задач определенного класса, необходимо, изучив **метод** самостоятельно не один раз применить его к решению новой задачи.

Если можно будет сформулировать **метод** решения *задач* в обобщенном виде, то будем называть его **обобщенный подход к решению задачи**.

После самостоятельного решения нескольких задач важно ответить на вопросы, которые помогут понять, в чем конкретно заключается **метод или обобщенный подход** к решению задач определенного класса:

вопрос *А*) на основании какого **закона** (или законов) «работает» **метод**, каковы условия применения этого **закона** (или законов) к решению задачи;

вопрос *Б*) каковы основные шаги (этапы) решения задачи этим **методом** или особенности его практического применения;

вопрос *В*) какие шаги при решении задачи этим **методом** могут быть общими для всего класса задач, какие шаги могут быть различными для отдельных задач этого класса.

Ответы на эти вопросы помогут научиться планировать решение новых задач и станут основой для формирования знаний о методах исследования явлений на теоретическом уровне, т.е. научат обобщать методы решения задач.

Оформление краткой записи условия физической задачи

В физике принято представлять содержания задачи в виде *краткого условия* с *требованиями*, это дисциплинирует ум и позволяет оперативно использовать указанные в условии задачи значения величин для решения задачи. Не играет большой роли, какая форма записи краткого условия и требований выбирается, главное – это аккуратность, информационность записи и представление значений величин в единицах международной системы измерения СИ.

На рис.Вв.2 представлен пример варианта краткой записи условия и требований следующей задачи:

На барабан радиусом 20 см и массой 4 кг намотан нерастяжимый невесомый шнур, к концу которого прикреплен брусок массой 1 кг. Под действием бруска шнур начинает разматываться и через 10 секунд брусок касается пола. С каким ускорением двигался брусок и сколько оборотов сделал барабан за это время?

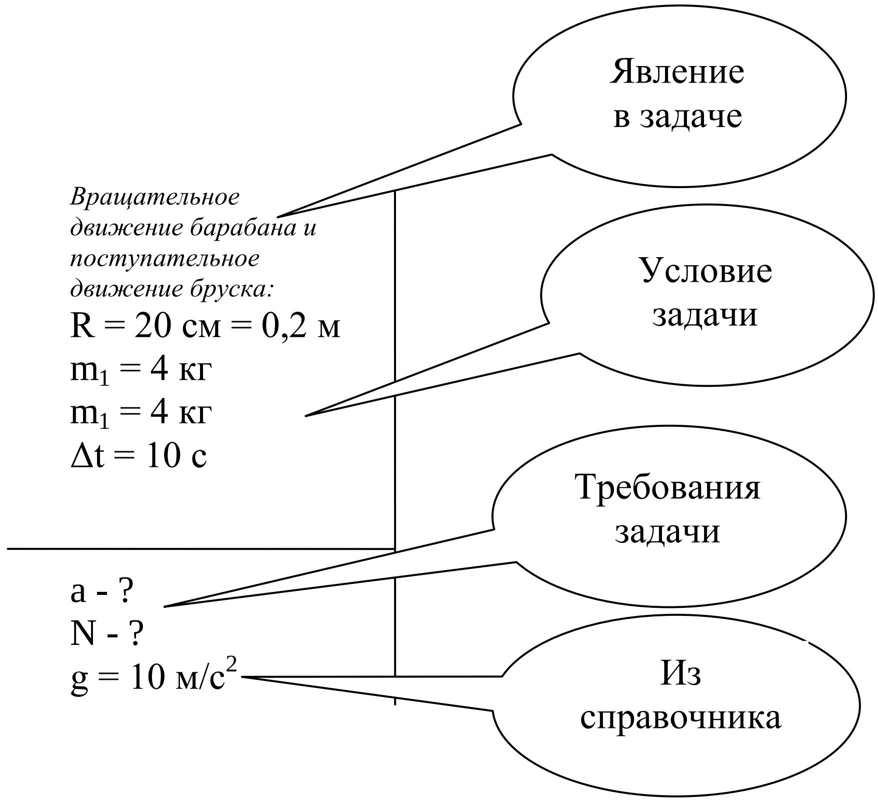


Рисунок Вв-2. Пример краткой записи условия и требований задачи

Краткая запись условия задачи *может быть* дополнена указанием, о каком явлении идет речь (рис. Вв-2, «Явление в задаче»), если это необходимо для успешного решения задачи. Краткая запись требований может быть дополнена значениями тех величин, которые определяются с помощью справочных таблиц (рис. Вв-2, «Из справочника»). Это должны быть величины, значения которых необходимы для решения задачи выбранным методом, их можно указать позже, по ходу решения задачи.

Физические задачи можно отнести к различному виду: вычислительные задачи, графические задачи, качественные задачи, экспериментальные задачи. Однако, какого вида не была бы задача, краткая запись ее условия и требований может быть аналогичной той, которая приведена на рис.Вв.2.

Вопросы и задания для самопроверки:

Что такое физическая задача?

Почему необходимо выделять явление в задаче?

В чем заключается обобщенный подход к решению задачи (какие общие четыре действия выполняются при решении задачи)?

В чем заключается каждое действие обобщенного подхода к решению задачи?

Изучив методы решения задач, на какие три основных вопроса необходимо научиться давать ответы?

Приведите пример краткой записи условия требования задач.

ИЗУЧАЕМ МЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

(практические занятия по разделу «Механика»)

К механическим явлениям относятся механическое движение и механическое взаимодействие тел.

Примеры механических движений тел – это криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела, движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела. Рассмотрим их в рамках данного раздела. О подходе к исследованию других, более сложных видов механического движения (например, о движении материальной точки по спирали, о прецессии твердого тела и др.), будет сказано в заключительном параграфе раздела. Движение материальной точки по спирали как пример сложного движения будет рассмотрено в учебном пособии «Физика. Конспект практических занятий. Ч.2. Электродинамика» при исследовании движения заряженной частицы в магнитном поле.

Примеры *механических взаимодействий тел* – это *абсолютно упругое взаимодействие* и *абсолютно неупругое взаимодействие*. Можно заметить, что это примеры двух «крайних» взаимодействий в природе и технике, все остальные механические взаимодействия тел по своим основным характеристикам находятся в диапазоне между этими «крайними» видами взаимодействий.

План предлагаемых практических занятий представлен в табл.1. В плане отражены названия практических занятий, номера занятий, их часы и тематика, т.е. изучаемые *механические явления* (выделены курсивом, например, «*поступательное движение твердого тела*»), и **законы**, на основе которых создается метод решения задач (выделены жирным шрифтом, например, **1-й закон Ньютона**).

Таблица 1. ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО РАЗДЕЛУ «МЕХАНИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ (МЕХАНИКА)»

ЯВЛЕНИЯ	– МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ – МЕХАНИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ

№ занятия	**Часы**	**Тематика занятий**
«Поступательное и вращательное движения тел (кинематика)»		
1	**2**	1А. *Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела*. **Кинематические уравнения поступательного движения (законы поступательного движения** в кинематике**).**
2	**2**	1В. *Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела*. **Кинематические уравнения вращательного движения (законы вращательного движения** в кинематике**).**
3	**2**	Контрольная работа «Механические движения (кинематика)»: - расчет *криволинейного движения материальной точки,* - расчет *поступательного движения твердого тела,* - расчет *движения материальной точки по окружности,* - расчет *вращательного движения твердого тела*.
«Поступательное движение тел (динамика). Взаимодействие поступательно движущихся тел»		
4 **5**	**4**	2А. *Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела* (движение тел по наклонной и горизонтальной плоскостям). **1,2 и 3-й законы Ньютона**.
		2В. *Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела*. **Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения механической энергии**.
		2С. *Взаимодействие поступательно движущихся тел* (упругое и неупругое). **Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии.**
«Вращательное движение тел (динамика). Взаимодействие вращающихся тел»		
6 **7**	**4**	3А. *Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела*. **Основной закон динамики вращательного движения.** *Вращательное и поступательное движения связанных тел.*
		3В. *Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела*. **Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения энергии.**
		3С. *Взаимодействие вращающихся тел*. **Закон сохранения момента импульса и закон сохранения энергии.** *Движение и взаимодействие вращающихся тел и тел, движущихся поступательно*. *Равновесие тел.* **Условие равновесия сил и условие равновесия моментов сил.**
8	**2**	Контрольная работа «Механические явления (механика)» - расчет *криволинейного движения материальной точки,* - расчет *поступательного движения твердого тела,* - расчет *движения материальной точки по окружности,* - расчет *вращательного движения твердого тела,* - расчет *движения тел, вращающихся и движущихся поступательно,* - расчет *механических взаимодействий тел,* - расчет параметров *равновесия тела*.

Отметим, что разные виды *механических движений*, описываются **законами**, имеющими близкий физический смысл, что может стать основой для формирования общих подходов к решению задач, рассматривающих эти движения, для выбора метода решения задачи. С целью разобраться в этих подходах будем действовать по следующему плану:

1) исследуем механические движения тел с помощью **законов движения (уравнений кинематики)** – практические занятия №1А и 1В по теме «Поступательное и вращательное движения тел (кинематика)»;

2) исследуем те же виды механических движений тел и возможные при этом их взаимодействия с помощью **законов динамики** – практические занятия №2А, №2В, № 2С («Поступательное движение тел. Взаимодействие поступательно движущихся тел (динамика)») *и* практические занятия №3А, №3В, №3С («Вращательное движение тел. Взаимодействие вращающихся тел (динамика)»), рассмотрим также движение и взаимодействие нескольких тел, которые участвуют во вращательном и поступательном движении;

3) обобщим и систематизируем **методы** решения задач и уточним критерии оценки контрольной или самостоятельной работ, цель которых – оценить умение применять рассмотренные **методы** к решению задач определенного класса.

Поступательное и вращательное движения тел (кинематика)

<u>Практическое занятие №1А</u>. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела

Механическое движение – это форма движения материи, которая может быть видна невооруженным глазом. *Механическое движение – это перемещение одних тел относительно других в пространстве с течением времени.* Если в определении «механического движения» сделать акцент на слове «относительно», то становится понятно, что для описания исследуемого движения необходимо выбрать тело, относительно которого будет рассматриваться движение данного тела в пространстве. Выбранное тело получает название *тело отсчета*, с ним связывают какую-либо систему координат, чаще всего выбирают декартову прямоугольную систему координат. Совокупность *тела отсчета* и устройства для измерения времени называют *системой отсчета*.

Тело, движение которого исследуется, принято заменять на одну из физических **моделей** и рассматривать движение выбранной **модели**.

Если рассматривается *движение одного тела*, то его физической **моделью** могут быть *материальная точка* или (абсолютно) *твердое тело*. Выбор **модели** осуществляется по условию соответствия движения тела движению одной из **моделей**:

✓ Если размерами тела можно пренебречь для рассматриваемого случая его движения, то тело можно принять за *материальную точку*.

✓ Если размерами тела пренебречь нельзя, но при этом рассматриваемое тело не деформируется, то его можно принять за (абсолютно) *твердое тело*.

Если *твердое тело движется поступательно,* то в этом случае рассматривают движение любой точки твердого тела, например, движение его точки центра масс. Это возможно потому, что <u>свойство всех точек поступательно движущегося твердого тела заключается в том, что они совершают одинаковое перемещение с одинаковой скоростью и одинаковым ускорением.</u>

Если рассмотреть *движение двух или более тел, связанных друг с другом*, то можно обнаружить, что связи накладывают ограничения на перемещения этих тел, поэтому соответствующие связям силы называют реакциями связей. Физическими **моделями** связанных тел могут быть свободная материальная точка или свободное твердое тело, если реакции связи заменить силами, действующими на рассматриваемые тела, «забывая», чем вызвано действие этих сил.

Если рассматривается *движение нескольких или многих тел*, то их физическими **моделями** могут быть *система материальных точек* или *сплошная среда*. И то, и другое – совокупность тел (частиц), движение которых рассматривается как совместное по каким-либо признакам. Традиционно принято рассматривать на начальном этапе изучения физики *движение системы материальных точек* (*СМТ*), для которой характерно то, что исследование ее движения можно свести к исследованию движения особой ее точки – точки *центра инерции* (*центра масс*). Особенности движения *сплошной среды* таковы, что ее движение нельзя свести к движению точки центра масс, *сплошную среду* можно представить только в виде континуума частиц (движение сплошной среды не рассматривается в этом пособии).

Рассмотрим задачи, условие и требование которых предполагает проведение исследования криволинейного движения материальной точки (МТ) и поступательного движения твердого тела (ТТ).

Криволинейное движение МТ – это такое движение МТ, при котором ее траектория представляет собой кривую линию.

Поступательное движение ТТ – это такое движение ТТ, при котором прямая линия, соединяющая две любые его точки, остается параллельна сама себе (при движении ТТ).

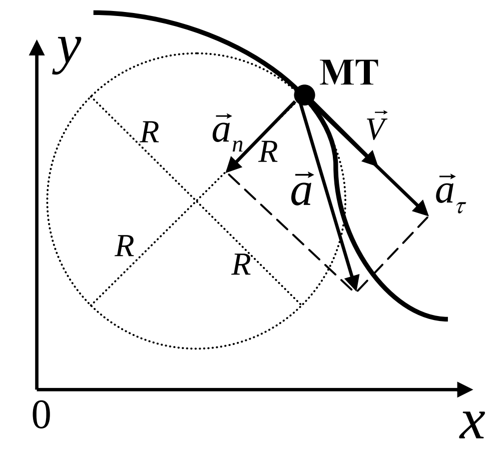
Запишем формулы для определения величин и законы рассматриваемых движений в табл.2 «КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ».

Вопрос: какими **величинами** можно описать *криволинейное движение МТ* в кинематике?

Ответ: в выбранной системе координат исследуемое движение можно описать с помощью таких **величин** кинематики, как перемещение, путь, скорость, ускорение, нормальное ускорение, тангенциальное ускорение. Формулы для определения этих **величин** запишем в крайний правый столбец табл.2 под заголовок «Величины». В общем случае задача определения пути может иметь сложное решение с использованием графического способа (путь численно равен площади под кривой зависимости скорости от времени $\vec{V}(t)$ или путь численно равен непосредственно длине траектории на графике зависимости $y(x)$ или $x(y)$) или с использованием операции интегрирования[3]. Поэтому в столбце под заголовком «Величины» обозначение пути изображено с вопросом после знака равенства «*S*= *?*».

[3] Существует математический способ *определения пути* S , требующий знания вида зависимости функции $v(t)$ и проведения операции интегрирования $S = \int v dt$. Этот способ приводит к знакомым со школы формулам зависимости пути *S* от времени *t* в случаях равномерного и равноускоренного движения МТ.

Таблица 2. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Законы	**Следствия, модели, связи**	**Величины**
$\vec{a} = const$ $\boxed{\begin{aligned}&\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},\\ &\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t.\end{aligned}}$	 I. $\boxed{\begin{aligned}&\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau\\ &\textit{или}\\ &\vec{a} = a_n \cdot \vec{n} + a_\tau \cdot \vec{\tau},\\ &a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2}.\end{aligned}}$ II. $\boxed{\begin{aligned}&\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},\\ &a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.\end{aligned}}$	$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $S = ?$ $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, $\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, $\langle\vec{\boldsymbol{a}}\rangle = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{V}}}{\Delta\boldsymbol{t}}$ $\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$ $\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$
	1) *Свободное падение* МТ ($\vec{a} = \vec{g}$): $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t,$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$	
	2) *Прямолинейное равноускоренное движение МТ вдоль оси ОХ* ($\vec{a} = a_x \cdot \vec{i}$): $x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2},$ $V = V_0 + at.$ $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}, S = \frac{V^2 - V_0^2}{2a}.$	

Вопрос: какими **законами движения** можно описать *криволинейное движение МТ* в кинематике?

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{r} = f(t),\\ &S = f(t),\\ &\begin{cases} x(t)\\ y(t)\end{cases}\end{aligned}}$$

Ответ: к этим законам относят уравнения зависимостей кинематических величин (пути, перемещения, скорости, ускорения) от времени[4]. **Законы**

[4] Более строго необходимо считать законом движения или уравнением движения МТ зависимость радиус-вектора, характеризующего перемещение МТ, от времени, а остальные уравнения считать следствием

движения в кинематике (**законы кинематики, уравнения кинематики**) – это законы, которые отражают очевидную физическую закономерность движения тела: «кинематические характеристики движения тела могут зависеть от времени» или «кинематические характеристики могут изменяться с течением времени», т.е. перемещение, путь, скорость, ускорение движущегося тела зависят от времени. Математически эти законы выводятся из формул для определения кинематических величин с учетом начальных условий.

Для случая *криволинейного движения МТ*, которое происходит с постоянным ускорением $\vec{a} = const$, **законы движения** запишем в левый столбец табл.2 под заголовок «Законы».

Поскольку средний столбец табл.2 под заголовком «Следствия, модели, связи» служит местом, где будут изображаться **модели** движения, записываться **следствия** из рассматриваемых законов и **уравнения связи** между величинами, изобразим в этом столбце **модель** *криволинейного движения МТ* и укажем направления векторов скорости и ускорения МТ в произвольный момент времени. Здесь же запишем два способа представления вектора ускорения движущейся МТ (см. табл.2):

> *Замечание 1.* Все указанные в табл.2.2 формулы могут быть справедливы для описания поступательного движения твердого тела: поступательное движение твердого тела можно рассматривать в качестве движения материальной точки в том случае, когда необходимо или достаточно описать движение точки центра масс данного твердого тела. Тогда формулы для перемещения $\Delta\vec{r}$, скорости $\vec{V}$, ускорения $\vec{a}$ материальной точки будут формулами перемещения $\Delta\vec{r}_C$, скорости $\vec{V}_C$, ускорения $\vec{a}_C$ точки центра масс твердого тела.

I способ. Как результат векторного сложения нормального и тангенциального ускорений – проекций вектора ускорения на направление касательной и нормали к ней в исследуемой точке движения МТ (проекции представляются в векторной форме с помощью единичных векторов $\vec{\tau}, \vec{n}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \\ \textit{или} \\ \vec{a} = a_n\vec{n} + a_\tau\vec{\tau}, \\ a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2}. \end{array}}$$

II способ. Как результат векторного сложения проекций вектора ускорения на ортонормированный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в исследуемой точке движения МТ (проекции представляются в векторной форме с помощью единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{array}}$$

первого, но мы будем придерживаться такого представления о законах движения, которое указано здесь, руководствуясь практическими соображениями.

Обратим внимание, что для представления векторной величины используется две математические записи, одна из них позволяет определить направление вектора, а вторая (получаемая на основе первой) – модуль вектора. Для представления скалярной величины всегда достаточно одного математического равенства.

В средний столбец табл.2 «Следствия, модели, связи» запишем также следствия из **законов движения** для двух частных случаев движения: 1) *свободное падение тел* и 2) *прямолинейное равноускоренное движение МТ* вдоль оси OX. Заметим, что известные из школьного курса физики формулы, позволяющие определить путь в двух случаях *прямолинейного равномерного* или *равноускоренного движения МТ* – это формулы-следствия из **законов движения**, полученные для этих частных случаев движения МТ (см. табл.2).

Внимание! Все указанные в табл.2 формулы применяют не только для описания (исследования) *криволинейного движения МТ*, но и для описания (исследования) *поступательного движения ТТ. Поступательное движение твердого тела* можно рассматривать как *движение материальной точки,* если рассматривать движение любой выбранной точки твердого тела. Если, рассматривая движение твердого тела, рассматривают *движение его точки центра инерции* (*центра масс*), то в формулах табл.2 такие величины, как перемещение $\Delta\vec{r}$, скорость $\vec{V}$, ускорение $\vec{a}$ *материальной точки,* должны быть заменены на перемещение $\Delta\vec{r}_C$, скорость $\vec{V}_C$, ускорение $\vec{a}_C$ точки C – точки *центра масс* тела.

Напомним, что кинематика – раздел механики, в котором не исследуется причина возникновения движения.

🗝 🔒 [5] Общий подход к решению задач кинематики[6]:

<u>Шаг первый</u>. Выясним, задан ли **закон движения** МТ (задано **уравнение движения** с числовыми коэффициентами).

<u>1. Если **закон движения** задан</u>, то для определения искомых величин необходимо и достаточно, используя заданный **закон движения**, найти искомые величины с помощью *формул для определений величин кинематики* и/или с помощью *уравнений связи* между этими величинами (см. третий и второй столбцы табл.2).

🗝 [7]Если **закон движения** задан – найдем искомые величины с помощью *формул для определения величин кинематики* и *уравнений связи* между ними.

<u>**2**. Если **закон движения** не задан</u> (не задано **уравнение движения** с числовыми коэффициентами), но заданы начальные условия или значения кинематических величин в какой-либо момент времени**,** то необходимо

[5] 🗝 🔒 – здесь и далее эти символы означают, что за ними идет текст с описанием общего подхода или метода решения рассматриваемого определенного класса задач.
[6] Напомним, что кинематика – раздел механики, в котором не исследуется причина возникновения движения тела, не рассматриваются силы, действующие на тела, или энергии этих тел.
[7] 🗝 – здесь и далее этот символ означает, что за ним идет ключевая фраза, играющая важную роль для решения задач данного класса.

«создать» (записать) **закон** рассматриваемого **движения** с числовыми коэффициентами. При этом необходимо проанализировать, является ли ускорение МТ постоянным, если – да, то можно использовать известный **закон движения** для случая $\vec{a} = const$ (см. первый столбец табл.2), для которого останется только определить числовые коэффициенты, а для их определения используют *начальные условия* (значения координат/скорости в момент времени, равный нулю) или *текущие значения* координат/скорости в момент времени, отличный от нуля.

Если **закон движения** не задан – «создадим» закон движения, используя *начальные* или иные *условия*.

<u>Шаг второй</u>. В результате осуществления первого шага мы будем иметь **закон движения** для *любого* момента времени! Перепишем законы движения для рассматриваемого *конкретного* момента времени (или нескольких конкретных моментов времени).

Получили **законы движения** МТ для *любого* момента времени – запишем их для *конкретного* момента времени.

<u>Шаг третий</u>. Решим полученную систему уравнений и определим искомые характеристики движения МТ.

Рассмотрим общий подход на примере решения задач **М1- М6**.

Задача М1. Движение материальной точки описывается уравнением $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$, где коэффициенты при единичных векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют размерность сантиметра. Определить для этого движения материальной точки: 1) зависимости скорости и ускорения от времени, 2) модули скорости и ускорения в момент времени 2с.

Выделим явление, описанное в условии задачи.

Вопрос: какое **явление** описано в задаче? В каком движении участвует МТ, в прямолинейном, в криволинейном или МТ движется по окружности?

Ответ: в задаче описано *механическое движение МТ*. Не всегда можно сразу обнаружить, какова траектория движения МТ. Ответим на этот вопрос позже, пока будем считать, что МТ участвует в движении, относящемся к самому общему случаю – *криволинейному движению МТ*.

Запишем краткое условие и требование задачи.

Обсудим возможное решение задачи.

Вопрос: задан ли **закон движения** материальной точки?

Ответ: **закон движения** задан. Следовательно, для решения задачи выбираем **<u>Шаг А</u>**, т.е. для нахождения зависимостей скорости и ускорения МТ от времени необходимо использовать формулы для определения величин кинематики (см. третий столбец табл.2 «Величины»).

Когда будут найдены **уравнения** с числовыми коэффициентами, отражающие зависимости скорости и ускорения МТ от времени, справедливые для *любого* момента времени, для определения искомых величин в заданный момент времени 2с достаточно будет подставить заданное *конкретное* время 2с в полученные **уравнения**.

Решим задачу.

Вопрос: что необходимо сделать, чтобы найти зависимость скорости МТ от времени?

Ответ: использовать определение скорости МТ (см. третий столбец табл.2), вектор *скорости МТ численно равен первой производной от* описывающего положение МТ в пространстве *радиус-вектора по времени*

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

т.е. необходимо взять производную от радиус-вектора по времени.

Внимание! Здесь необходимо пояснить один из важных моментов для решения всех физических задач. Невозможно описать явления природы с помощью величин физики, не используя двух основных видов величин – *скалярной величины и векторной величины*[8]!

Скалярная величина имеет числовое значение, кратное единичной мере этой величины. *Векторная величина* также имеет числовое значение, кратное единичной мере этой величины, получившее название модуль вектора, но кроме этого *векторная величина* имеет еще и направление в пространстве. Например, сила, скорость – это векторные величины (подумайте, что происходит с телами в ситуации, когда эти вектора меняют свое направление или модуль).

При решении физических задач используют одно негласное правило: *вектора физических величин изображают в масштабе относительно друг друга!* Конечно, если это возможно. Работа с векторными величинами может быть осуществлена двумя способами:

1 способ работы с векторными величинами:

- вектор представляется в виде совокупности проекций на выбранные направления осей координат или другие избранные направления,

- над проекциями векторной величины проводятся математические операции и определяются искомые величины,

- в результате векторная величина представляется (записывается) с помощью ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ или с помощью единичных векторов нормали и касательной $\vec{n}, \vec{\tau}$ (см. средний столбец «Следствия, модели, связи»), полученная запись позволяет определить ее направление в пространстве, корень квадратный от суммы квадратов проекций векторной величины (на выбранные направления) определяет ее модуль.

2 способ работы с векторными величинами:

- по правилам векторной алгебры производится непосредственное сложение, вычитание, дифференцирование и другие математические операции над векторными величинами без представления их в виде проекций, тогда полученная непосредственно после математических

[8] Существует еще третий вид величин для описания свойств тел, он используется в том случае, если тело обладает разными физическими свойствами в разных направлениях (например, тело пропускает свет по-разному в разных направлениях или тело по-разному деформируется в разных направлениях под действием одинаковой по модулю силы). Для описания подобных свойств тела используют так называемые *тензорные величины*. Отметим, что тела с такими свойствами называют анизотропными.

действий запись векторной величины позволяет определить ее направление в пространстве, а корень квадратный от суммы квадратов проекций векторной величины (отражены в математической записи) определяет модуль векторной величины.

Вернемся к решению задач, для определения зависимостей скорости и ускорения МТ от времени (задача М1) рассмотрим оба способа работы с векторными величинами.

1) Определим зависимости скорости и ускорения движущейся МТ от времени. По 1-му способу работы с векторными величинами представим **закон движения МТ** $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$ в виде проекций радиус-вектора $\vec{r}$ на направления выбранных осей координат: на оси ОХ, ОУ и OZ. Для этого сравним заданный закон движения МТ с законом движения в общем виде

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$$

и определим проекции

$$x(t) = 4t(см),$$

$$y(t) = 3t^2(см),$$

$$z(t) = 1(см). \qquad (М1\text{-}1)$$

Найдем производные от координат $x(t), y(t), z(t)$ по времени – получим проекции скорости МТ:

$$V_X(t) = \frac{dx(t)}{dt}, V_X(t) = (4t)' = 4(см/с),$$

$$V_Y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, V_Y(t) = (3t^2)' = 6t(см/с),$$

$$V_Z(t) = \frac{dz(t)}{dt}, V_Z(t) = (1)' = 0. \qquad (М1\text{-}2)$$

Как видим, скорость МТ вдоль оси ОХ не изменяется с течением времени, остается постоянной, равной *4 см/с*, т.е. движение МТ в этом направлении - равномерное. Скорость МТ вдоль оси OZ равна нулю, т.е. движения МТ в этом направлении не происходит, МТ совершает движение в плоскости *z=const* (*z = 1см*).

Найдем производные от проекций скорости $V_X(t), V_Y(t), V_Z(t)$ по времени – получим проекции ускорения МТ:

$$a_X(t) = \frac{dV_X(t)}{dt}, a_X(t) = (4)' = 0,$$

$$a_Y(t) = \frac{dV_Y(t)}{dt}, a_Y(t) = (6t)' = 6(см/с^2). \qquad (М1\text{-}3)$$

Как видим, ускорение МТ вдоль оси ОУ не изменяется с течением времени, остается постоянным, равным *6 см/с*^{2}, т.е. в этом направлении МТ движется равноускоренно. Ускорение МТ вдоль оси ОХ равно нулю, т.к. МТ в этом направлении движется равномерно.

Вопрос: как представить зависимость скорости и ускорения МТ от времени в общем виде и для данного случая движения МТ?

Ответ: запишем сумму проекций скорости $V_X(t), V_Y(t), V_Z(t)$ с помощью ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а с помощью квадратичного сложения этих проекций определим модуль (числовое значение) скорости МТ. Также поступим и с проекциями ускорения МТ.

Вектор скорости МТ в общем виде и для данного случая движения МТ зависит от времени таким образом

$$\vec{V}(t) = V_X(t)\vec{i} + V_Y(t)\vec{j} + V_Z(t)\vec{k},$$
$$\vec{V}(t) = 4\vec{i} + 6t\vec{j}. \qquad \text{(М1-4)}$$

Модуль скорости МТ в общем виде и для данного случая движения МТ зависит от времени таким образом

$$V(t) = \sqrt{V_X^2(t) + V_Y^2(t) + V_Z^2(t)},$$
$$V(t) = \sqrt{16 + 36t^2}\,(см/с). \qquad \text{(М1-5)}$$

Вектор ускорения МТ в общем виде и для данного случая движения МТ будет зависеть от времени таким образом

$$\vec{a}(t) = a_X(t)\vec{i} + a_Y(t)\vec{j} + a_Z(t)\vec{k},$$
$$\vec{a}(t) = 6\vec{j}. \qquad \text{(М1-6)}$$

Модуль ускорения МТ в общем виде и для данного случая движения МТ

$$a(t) = \sqrt{a_X^2(t) + a_Y^2(t) + a_Z^2(t)},$$
$$a(t) = 6(см/с^2). \qquad \text{(М1-7)}$$

2) Определим модули скорости и ускорения движущейся МТ в момент времени 2с. Для этого подставим значение 2с в одно из уравнений (М1-5), а именно в уравнение зависимости скорости от времени *для данного случая движения МТ*:

$$t_1 = 2с \Rightarrow\; V(t_1) = \sqrt{16 + 36\cdot 4} = 12{,}65(см/с). \qquad \text{(М1-8)}$$

Ускорение не зависит от времени см. (М1-6) и (М1-7), оно будет иметь значение *6 см/с*^{2} в любой момент времени.

По <u>2-му способу работы с векторными величинами</u> для определения скорости МТ найдем производную непосредственно от радиус-вектора $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

или

$$\vec{V}(t) = (4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k})',$$
$$\vec{V}(t) = 4\vec{i} + 6t\vec{j}.$$

Как видим, мы сразу получили второе уравнение (М1-4) – зависимость *вектора скорости* МТ от времени *для данного случая движения*. Аналогичная ситуация произойдет при нахождении ускорения МТ. *Вектор ускорения* МТ найдем как производную от *вектора скорости*:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

или

$$\vec{a}(t)=(\vec{V}(t))'$$

$$\vec{a}(t)=(4\vec{i}+6t\vec{j})',$$

$$\vec{a}(t)=6\vec{j}.$$

Как видим, мы сразу получили второе уравнение (М1-6) – уравнение *ускорения* МТ *для данного случая движения*.

Далее задача решается также, как это было сделано выше, с помощью формул (М1-5), (М1-7) и (М1-8).

Т.о. к особенностям рассматриваемого движения МТ можно отнести следующие: движение МТ совершается в плоскости z=const; вдоль оси ОХ *МТ движется равномерно*, вдоль оси ОУ – *равноускоренно*.

Ответ к задаче М1: 1) $\vec{V}(t)=4\vec{i}+6t\vec{j}$ и $\vec{a}(t)=6\vec{j}$, 2) $12{,}65 см/с$ и $6 см/с^2$.

Задача М2. Для случая движения материальной точки, описанного в предыдущей задаче (движение МТ подчиняется закону $\vec{r}(t)=4t\vec{i}+3t^2\vec{j}+\vec{k}$), определить уравнение траектории движения.

Для определения *уравнения траектории* движения МТ используем <u>1-й способ работы с векторными величинами</u> и представим **закон движения** $\vec{r}(t)=4t\vec{i}+3t^2\vec{j}+\vec{k}$ в проекциях на выбранные оси координат (см. (М1-1)).

$$x(t)=4t(см),$$

$$y(t)=3t^2(см),$$

$$z(t)=1(см).$$

Для определения *уравнения траектории y(x)* [9] используем **метод** исключения параметра ***t*** (времени) из уравнений ***x(t)*** и ***y(t)***:

$$x(t)=4t(см),$$

$$t=\frac{x(t)}{4}$$

$$y(t)=3t^2(см),$$

$$y(t)=3\cdot(\frac{x(t)}{4})^2,$$

$$y(x)=\frac{3}{16}x^2. \qquad (М2\text{-}1)$$

Обратим внимание на вид полученной зависимости *y(x)*: уравнению траектории движения МТ соответствует парабола, которая пересекает нуль декартовой системы координат. Следовательно, рассматриваемое движение МТ – *криволинейное*.

Ответ к задаче М2: $y(x)=\frac{3}{16}x^2$.

---

[9] Иногда, бывает легче определить вид зависимости $y(x)$.

Задача М3. Для случая движения материальной точки, описанного в задаче М1, определить модули нормального, тангенциального и полного ускорения в момент времени 2с, если в этот момент времени радиус кривизны траектории был равен 84,2 см.

Решим задачу, используя не декартову систему координат, а два «избранных» направления, которые указывают единичные вектора нормали $\vec{n}$ и касательной $\vec{\tau}$ к траектории движения МТ. Отметим, что с течением времени эти вектора меняют свое направление в пространстве, оставаясь направленными по нормали и по касательной в каждой следующей точке траектории движения МТ.

Планируя решение задачи, обратим внимание на то, что **<u>закон движения</u>** <u>задан</u>, следовательно, для решения задачи используем из ОБЩЕГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ **<u>Шаг первый-А</u>**, т.е. определим зависимости от времени нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений, используя формулы для их определения (см. третий столбец табл. 2). После этого определим полное ускорение МТ (см. второй столбец табл.2), которое будет представлено следующим образом *в векторном виде*

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

или , (М3-1)

$$\vec{a} = a_n \cdot \vec{n} + a_\tau \cdot \vec{\tau}$$

и по модулю

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2}.$$

После того, как определим все указанные величины для любого момента времени, определим эти величины для конкретного момента времени, т.е. сделаем **Шаг второй** из ОБЩЕГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ.

Решим задачу. Перед тем, как искать проекции ускорения на направления нормали и касательной к траектории движения МТ, определим зависимость скорости МТ от времени, используя <u>2-й способ работы с векторными величинами:</u> для определения скорости МТ найдем производную непосредственно от радиус-вектора $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$ по времени.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

или

$$\vec{V}(t) = (4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k})',$$

$$\vec{V}(t) = 4\vec{i} + 6t\vec{j}. \qquad \text{(М3-2)}$$

Определим модуль скорости МТ

$$V(t) = \sqrt{V_X^2(t) + V_Y^2(t) + V_Z^2(t)},$$

$$V(t) = \sqrt{16 + 36t^2}\,(см/с). \qquad \text{(М3-3)}$$

Теперь можем найти зависимости от времени нормального ускорения и тангенциального ускорения движущейся МТ. *Нормальное ускорение равно* *отношению* <u>*модуля*</u> *скорости в квадрате к радиусу кривизны траектории* (см. определение величины в табл.2):

$$\vec{a}_n = \frac{V^2(t)}{R}\vec{n},$$

$$\vec{a}_n = \frac{(\sqrt{16+36t^2})^2}{R}\vec{n},$$

$$\vec{a}_n = \frac{(16+36t^2)}{R}\vec{n}.$$

Поскольку вектор нормального ускорения всегда ориентирован в направлении вектора нормали $\vec{n}$, можно было определить нормальное ускорение по модулю (без единичного вектора $\vec{n}$)

$$a_n = \frac{16+36t^2}{R}. \qquad \text{(МЗ-4)}$$

Записав позже, если необходимо, $\vec{a}_n = a_n \cdot \vec{n}$

Тангенциальное ускорение численно равно производной от <u>*модуля*</u> *скорости по времени*. Вектор тангенциального ускорения всегда ориентирован в направлении вектора касательной $\vec{\tau}$, поэтому можно определить тангенциальное ускорение только по модулю:

$$a_\tau = \frac{dV(t)}{dt}$$

или

$$a_\tau = (\sqrt{16+36t^2})',$$

$$a_\tau = \frac{36\cdot 2t}{2\sqrt{16+36t^2}},$$

$$a_\tau = \frac{72t}{2\sqrt{16+36t^2}}. \qquad \text{(МЗ-5)}$$

Записав позже, если необходимо, $\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau}$

Заметим, что формулы определения тангенциального ускорения и полного ускорения различны: «тангенциальное ускорение МТ численно равно производной от <u>модуля</u> скорости $\vec{a}_\tau = \dfrac{dV(t)}{dt}\vec{\tau}$ », а «полное ускорение МТ численно равно производной от <u>вектора</u> скорости» $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}$.

Результат, полученный в формулах (МЗ-4) и (МЗ-5) показывает, что разложение рассматриваемого движения МТ на выбранные направления приводит к достаточно сложному математическому выражению, если необходимо определить зависимость полного ускорения движущейся МТ от времени (см. формулы (МЗ-1)):

$$\vec{a} = \frac{16+36t^2}{R}\cdot\vec{n} + \frac{72t}{2\sqrt{16+36t^2}}\cdot\vec{\tau},$$

$$a = \sqrt{\frac{(16+36t^2)^2}{R^2} + \frac{(72t)^2}{4(16+36t^2)}}. \qquad \text{(МЗ-6)}$$

Поскольку необходимо найти значение *модулей* нормального ускорения, тангенциального ускорения и полного ускорения МТ в момент времени, равный 2с, то можно не записывать уравнения (М3-6), а определить сначала модули нормального ускорения и тангенциального ускорения в заданный момент времени (используем последние формулы в уравнениях (М3-4) и (М3-5))

$$a_n = \frac{(16+36(2)^2)}{84{,}2}$$

$$a_n = \frac{160}{84{,}2} = 1{,}9(см/c^2). \qquad \text{(М3-7)}$$

$$a_\tau = \frac{72\cdot 2}{2\sqrt{16+36(2)^2}}$$

$$a_\tau = 5{,}7(см/c^2). \qquad \text{(М3-8)}$$

А затем определить модуль полного ускорения МТ по формуле $a = \sqrt{a_n^2 + a_r^2}$:

$$a = \sqrt{1{,}9^2 + 5{,}7^2} = 6{,}0(см/c^2).$$

Заметим, что результат получился такой же, как и в предыдущей задаче: ускорение МТ, движущейся по заданному закону, не изменяется с течением времени (остается постоянным по модулю и направлению). Изменяются, очевидно, по модулю и направлению нормальное $\vec{a}_n$ и тангенциальное $\vec{a}_\tau$ ускорения, а также значение радиуса кривизны траектории *R*. Вектор скорости движущейся МТ всегда будет направлен по касательной к траектории движения (в любой момент времени и в любой точке траектории), т.е. его всегда можно представить в виде

$$\vec{V}(t) = V(t)\cdot\tau$$

или

$$\vec{V}(t) = \sqrt{16+36t^2}\cdot\vec{\tau}.$$

Вопрос: была ли необходимость переводить единицы величин *перемещения*, *скорости*, *ускорения* в систему СИ в этой и предыдущих задачах?

Ответ: в кинематике допускается решение задач без указанного перевода единиц. Переводить единицы величин необходимо во всех остальных формулах, т.к. все законы физики в российских учебниках записаны в рамках данной системы измерения СИ: если использовать другие единицы величин, то в законах физики должны быть изменены коэффициенты, учитывающие размерности входящих величин.

Ответ к задаче М3: 1,9 см/с^2, 5,7 см/с^2 и 6,0 см/с^2.

Задача М4. Для случая движения материальной точки, описанного в задаче М1, определить перемещение, среднюю скорость и ускорение материальной точки за время движения от 0 до 2с.

Планируя решение задачи, обратим внимание на то, что **закон движения задан**, следовательно, для решения задачи используем из ОБЩЕГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ **Шаг первый-А**, т.е.

определим среднюю скорость и среднее ускорение МТ по формулам для их определения (см. третий столбец табл. 2)

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad \text{(М4-1)}$$

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \qquad \text{(М4-2)}$$

Здесь $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - это вектор *перемещения МТ*, а $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ - это приращение вектора *скорости МТ* за рассматриваемый промежуток времени. Обратим внимание, что перечисленные здесь величины – векторные, будем решать задачу, используя 2-й способ работы с векторными величинами.

Решим задачу. Для того, чтобы найти вектор *перемещения МТ* за промежуток времени от *0* до *2с*, используем **закон движения** $\vec{r}(t) = 4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k}$. Определим положение МТ в моменты времени $t_1=0$ и $t_2=2с$ ($\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$), а затем определим вектор *перемещения МТ* $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ за указанный промежуток времени:

$$t_1 = 0,$$

$$\vec{r}_1 = 4\cdot 0\cdot\vec{i} + 3\cdot(0)^2\cdot\vec{j} + \vec{k},$$

$$t_2 = 2c,$$

$$\vec{r}_2 = 4\cdot 2\cdot\vec{i} + 3\cdot(2)^2\cdot\vec{j} + \vec{k},$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

$$\Delta\vec{r} = 4\cdot(2-0)\cdot\vec{i} + 3\cdot((2)^2-(0)^2)\cdot\vec{j} + (1-1)\cdot\vec{k},$$

$$\Delta\vec{r} = 8\vec{i} + 12\vec{j}.$$

Последнее уравнение в общем виде представляется следующим образом $\Delta\vec{r} = \Delta x\cdot\vec{i} + \Delta y\cdot\vec{j}$. Из чего следует, что модуль вектора *перемещения МТ* можно определить в виде $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и с учетом числовых значений можно получить $\Delta r = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14{,}4(см)$. На *14,4 см* переместилась МТ за время от *0* до *2с*.

Вектор *средней скорости* МТ можно определить (см. (М4-1)) непосредственно с помощью вектора перемещения $\Delta\vec{r} = 8\vec{i} + 12\vec{j}$, разделив его на промежуток времени Δt, за которое произошло изменение положения МТ в пространстве, значение $\Delta t = t_2 - t_1 = 2 - 0 = 2(c)$.

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{8\vec{i} + 12\vec{j}}{\Delta t}, \qquad \text{(М3-3)}$$

$$\langle\vec{V}\rangle = 4\vec{i} + 6\vec{j}.$$

Последнее уравнение в общем виде представляется следующим образом $\langle\vec{V}\rangle = \langle V\rangle_x\cdot\vec{i} + \langle V\rangle_y\cdot\vec{j}$. Из чего следует, что модуль *средней скорости МТ* можно записать в виде $\langle V\rangle = \sqrt{\langle V\rangle_x^{\,2} + \langle V\rangle_y^{\,2}}$ и с учетом числовых значений можно получить модуль *средней скорости МТ* за рассматриваемый промежуток времени $\langle V\rangle = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7{,}2(см/c^2)$.

Заметим, что вектор средней скорости совпадает по направлению с вектором перемещения $\Delta\vec{r}$, этот вывод следует из определения $\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Для того, чтобы найти вектор *среднего ускорения* МТ за рассматриваемый промежуток времени, необходимо найти приращение вектора *скорости МТ* за промежуток времени от *0* до *2с* (см. (М4-2)). Определим зависимость вектора скорости от времени, используя формулу для определения скорости (см.табл.2). *Вектор скорости численно равен первой производной от вектора перемещения по времени* (можно использовать результат задачи М1, см.выше):

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

или

$$\vec{V}(t) = (4t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \vec{k})',$$

$$\vec{V}(t) = 4\vec{i} + 6t\vec{j}.$$

Определим вектор скорости МТ отдельно в каждый заданный момент времени $t_1=0$ и $t_2=2c$

$$\mathrm{t}_1 = 0,$$

$$\vec{V}_1 = 4\vec{i} + 6\cdot 0\cdot\vec{j},$$

$$\mathrm{t}_2 = 2\mathrm{c},$$

$$\vec{V}_2 = 4\vec{i} + 6\cdot 2\cdot\vec{j}.$$

После этого определим приращение вектора скорости $\Delta\vec{V}$ движущейся МТ за рассматриваемый промежуток времени, определим его как разность между векторами скорости $\vec{V}_2$ и $\vec{V}_1$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1,$$

$$\Delta\vec{V} = 6\cdot 2\cdot\vec{j} = 12\vec{j}.$$

Последнее уравнение в общем виде представляется следующим образом $\Delta\vec{V} = \Delta V_y\cdot\vec{j}$, из чего следует, что модуль вектора *средней скорости* МТ $\Delta V = \Delta V_y$, т.е. за рассматриваемый промежуток времени $\Delta V = 12(см/c)$.

Вектор среднего ускорения МТ можно определить (см. (М4-2)) непосредственно разделив приращение вектора скорости $\Delta\vec{V} = 12\vec{j}$, на промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, за которое произошло это приращение вектора скорости

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{6\vec{j}}{\Delta t}, \qquad \text{(М3-1)}$$

$$\langle\vec{a}\rangle = 3\vec{j}.$$

Последнее уравнение в общем виде представляется следующим образом $\langle\vec{a}\rangle = \langle a\rangle_y\cdot\vec{j}$, из чего следует, что модуль вектора *среднего ускорения* МТ $\langle a\rangle = \langle a\rangle_y$, т.е. за рассматриваемый промежуток времени $\langle a\rangle = 3(см/c^2)$.

Заметим, что полученные значения *средней скорости* и *среднего ускорения* отличаются от значений *скорости* и *ускорения*, полученные при решении задачи М1 для момента времени $t_2 = 2c$ и это правильно, т.к. *средняя скорость* и *среднее ускорение* характеризуют движение МТ *за определенный промежуток времени*, а не в один выбранный момент времени. Они являются характеристиками движения МТ в том случае, когда необходимо описать движение МТ на больших расстояниях и за большие промежутки времени.

Ответ к задаче М4: *14,4 см, 7,2 см/с, 3 см/с*^{2}**.**

Задача М5. Тело брошено под углом 30^0 к горизонту со скоростью 10 м/с. Определить время полета в воздухе, дальность полета, максимальную высоту подъема, скорость тела через 2 с после броска, а также под каким углом к горизонту в этот момент времени будет направлен вектор скорости тела и вектор его тангенциального ускорения. Силами сопротивления воздуха пренебречь.

Выделим явление, описанное в условии задачи.

Вопрос: какое **явление** описано в задаче? В каком движении участвует МТ, в прямолинейном, в криволинейном или по окружности?

Ответ: в задаче описано *криволинейное движение МТ* под действием только одной силы тяжести.

Запишем краткое условие и требование задачи (самостоятельно).

Планируя решение задачи, зададимся вопросом: задан ли **закон движения** материальной точки?

Ответ: **закон движения** не задан. Следовательно, для решения задачи выбираем **Шаг первый-В** (см. выше ОБЩИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ), т.е. для нахождения скорости и ускорения МТ в рассматриваемые моменты времени необходимо «создать» закон движения, т.е. **уравнения движения** с числовыми коэффициентами.

Вопрос: как «создать» закон рассматриваемого движения?

Ответ: для «создания» закона движения проанализируем, изменяется ли ускорение движущегося тела. От этого зависит, какого вида законы движения можно получить с учетом начальных условий из формул для определения величин кинематики. Отметим, что если ускорение МТ является постоянным $\vec{a} = const$, то для этого случая получают **законы движения** следующего вида (см. лекции и первый столбец табл.2):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a}t.$$

Используя условие задачи, необходимо будет определить для этих уравнений числовые коэффициенты. В результате мы получим законы рассматриваемого движения, справедливые *для любого момента времени*, а для определения искомых величин может понадобиться переписать их *для конкретных моментов времени* (подставив значения координат или скорости для тех «особых» точек пространства и времени, о которых можно судить по специфике движения, или подставив в уравнения значение заданного момента времени или т.п.). Наконец решим полученную последнюю систему уравнений и определим искомые величины.

Уточним, если значение времени задано, то можно подставить непосредственно его в *уравнения движения для любого момента времени* и определить характеристики движения в этот момент времени. Если значение времени не задано, то в уравнениях движения целесообразно заменить параметр t (указывающий на любой момент времени) на параметр *t с индексом* (указывающим на конкретный момент времени для рассматриваемой «особой» точки движения). При решении задачи **М5** необходимо будет рассмотреть и первый, и второй указанные здесь действия.

Решим задачу. Основанием решения задачи может послужить следующий алгоритм (см. табл.3).

Таблица 3. АЛГОРИТМ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ, В СЛУЧАЕ, ЕСЛИ ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ НЕ ЗАДАН

Выполняемые действия
1. Изобразить движение МТ (нарисовать рисунок) и выбрать оси координат, относительно которых будем рассматривать движение МТ.
2. Записать законы движения МТ в общем виде *в векторной форме*.
3. Переписать законы движения МТ *в проекциях на выбранные оси координат с учетом начальных условий*. Получим уравнения движения МТ с числовыми коэффициентами, справедливые *для любого момента времени*.
4. Записать полученные в п.3 уравнения *для рассматриваемых «особых» точек движения МТ* (*для конкретного момента времени, для конкретной точки в пространстве* движения МТ) и решить полученную систему уравнений (определить искомые величины).

Воспользуемся предложенным алгоритмом.

1. Нарисуем рисунок и оси координат. Изобразим траекторию движения тела на рисунке и укажем на нем направление вектора скорости $\vec{V}_0$ в начальный момент времени и вектора ускорения свободного падения $\vec{g}$ в два других момента времени.

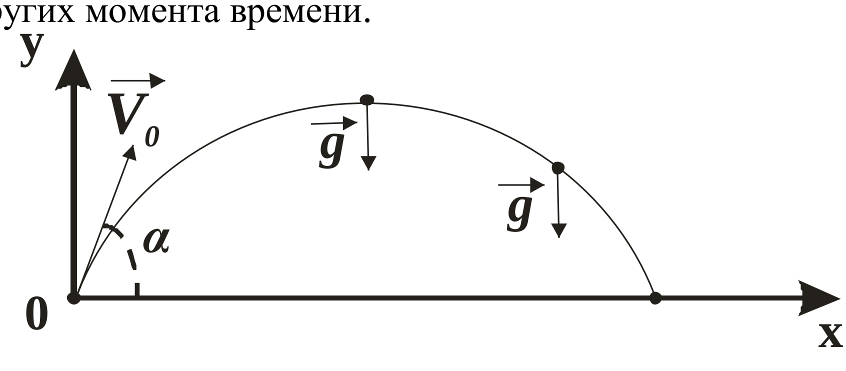


Рисунок 1. Движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту

2. Запишем законы движения МТ в общем виде *в векторной форме*. Поскольку тело движется под действием только силы тяжести, то ускорение его – это ускорение свободного падения, при движении тела оно остается направленным к центру Земли и равным 9,8 м/с^2, т.е. выполняется условие $\vec{a} = const$, к тому же $\vec{a} = \vec{g}$. Следовательно, законы данного движения в общем виде (см. первый столбец табл.2) будут такими

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{g}t.$$

Обратим внимание, что в них учтено равенство $\vec{a} = \vec{g}$.

3. Перепишем законы движения в проекциях на выбранные оси координат с учетом начальных условий

$$OX: x = x_0 + V_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$

$$V_x = V_{0x} + g_x t$$

$$OY: y = y_0 + V_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2},$$

$$V_y = V_{0y} + g_y t.$$

Учтем начальные условия $x_0 = 0, y_0 = 0, V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha, V_{0y} = V_0 \cdot \sin\alpha$, и то, что ускорение свободного падения имеет проекцию только на ось ОУ ($g_x = 0, g_y = -g$), тогда окончательно получим

$$OX: x = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t,$$

$$V_x = V_0 \cdot \cos\alpha$$

$$OY: y = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

$$V_y = V_0 \cdot \sin\alpha - gt.$$

Получили уравнения для координат и скорости движения МТ, справедливые для любого момента времени. Обратим внимание, что вдоль оси ОХ движение тела – равномерное: скорость не изменяется.

4. Запишем полученные в п.3 уравнения движения МТ *для конкретного момента времени*, *для конкретной точки движения* тела, которые мы называем «особыми» точками движения. «Особых» точек в рассматриваемом движении можно выделить три.

4.1. Наивысшая точка подъема тела в момент времени $t = t_B$, в которой $y = h$, а скорость тела равна проекции скорости тела на ось ОХ $\vec{V} = \vec{V}_x$ (проекция скорости тела на ось ОУ равна нулю $\vec{V}_y = 0$). Для этого момента времени уравнения движения преобразуются в уравнения

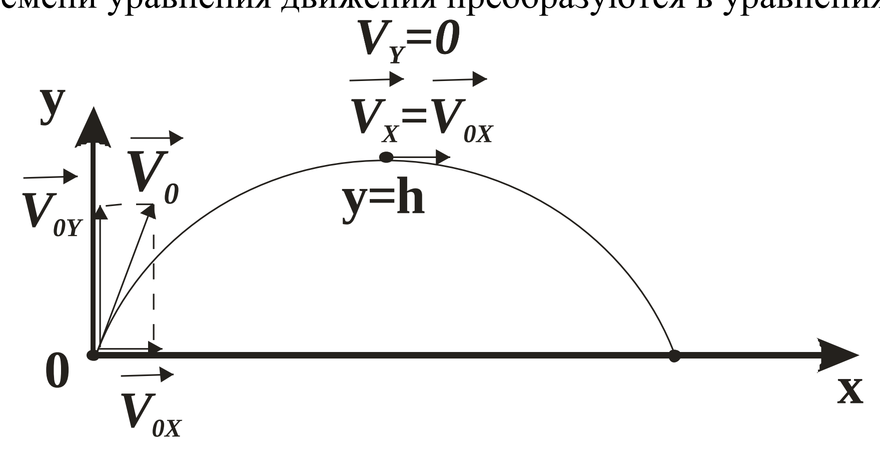


Рисунок 2. Движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту. Значения скорости и координаты y в наивысшей точке подъема

$$OY: h = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_B - \frac{g t_B^{\;2}}{2},$$

$$0 = V_0 \cdot \sin\alpha - g t_B. \qquad \text{(M5-1)}$$

Решая полученную систему уравнений, определим искомые величины: из второго уравнения найдем время t_B, когда тело достигает наивысшей точки

$$g t_B = V_0 \cdot \sin\alpha,$$

$$t_B = \frac{V_0 \cdot \sin\alpha}{g} = -.$$

Подставим результат в первое уравнение (M5-1) и определим наибольшую высоту полета

4.2. Точка падения тела в момент времени $t = t_П$, в которой $x = l, y = 0$. Для этого момента времени уравнения движения преобразуются в уравнения

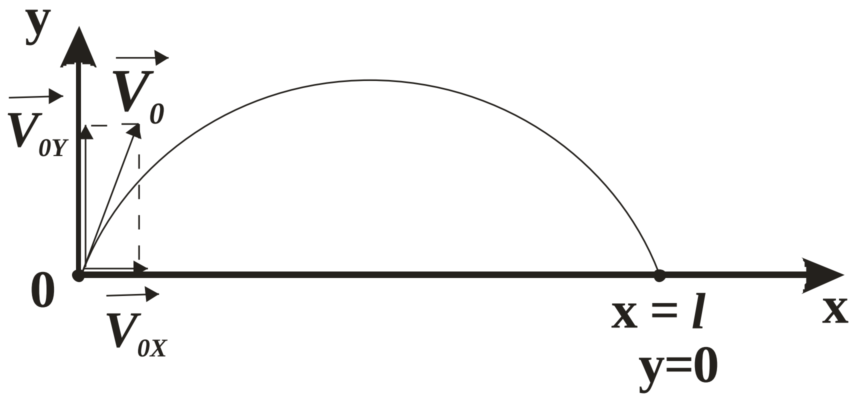


Рисунок 3. Движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту. Значения координат *x* и *y* в точке падения

$$l = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_П,$$

$$0 = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_П - \frac{g t_П^{\;2}}{2}.$$

Решим полученную систему уравнений и определим искомые величины.

4.3. Точка траектории, в которой тело будет находиться в момент времени 2с ($t = t_2$).

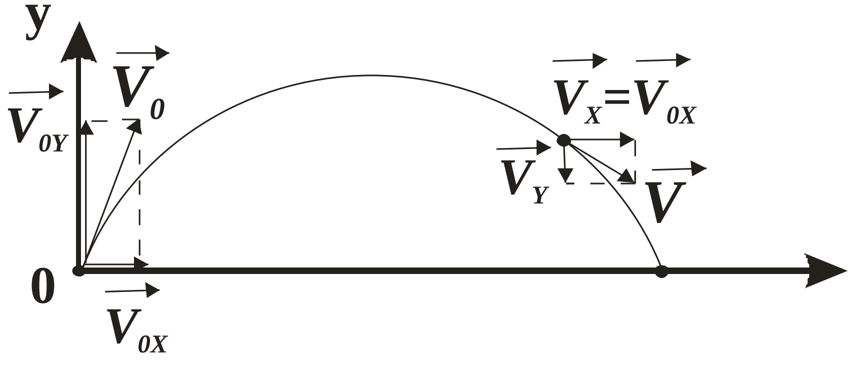


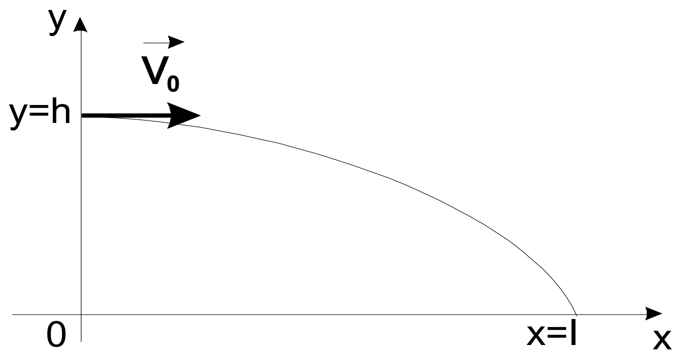
Рисунок 4. Движение тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонт. Направления проекций вектора скорости в определенный момент времени

$$OX: x_2 = V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_2,$$
$$V_{x2} = V_0 \cdot \cos\alpha$$
$$OY: y_2 = V_0 \cdot \sin\alpha \cdot t_2 - \frac{g t_2^{\,2}}{2},$$
$$V_{y2} = V_0 \cdot \sin\alpha - g t_2.$$

Решим полученную систему уравнений и определим искомые величины.

Задача М6. Камень, брошенный с башни в горизонтальном направлении, находился в полете 2 с и упал от основания башни на расстоянии30 м. Определить высоту башни и начальную скорость камня.

$t_П = 2$с,
$l = 30$м.
h - ?
V_0 -?



Запишем уравнения движения камня в векторном виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Направим ось OX горизонтально, ось OY вертикально, так как указано на рисунке, и перепишем первое уравнение движения в скалярной форме

$$x = v_0 t\ , \qquad (1)$$
$$y = y_0 - gt^2/2\ , \qquad (2)$$

где $y_0 = h$.

Для точки падения $x = l$, $y = 0$, $t = t_П$ и уравнения (1) и (2) примут вид

$$l = v_0\, t_П\ , \qquad \text{и} \qquad \boxed{v_0 = l / t_П}$$

$$0 = h - gt^2/2\ , \qquad \text{и} \qquad \boxed{h = gt^2/2}$$

Рассчитаем начальную скорость камня

$$v_0 = 30 / 2 = 15 \text{ (м / с)}$$

и высоту башни

$$h = 9{,}8 \cdot 2^2 / 2 = 19{,}6 \text{ (м / с}^2\text{)}.$$

Ответ: $h = 19{,}6$ **м / с^2 ,** $v_0 = 15$ **м / с .**

Обратим внимание, что для описания *криволинейного движения МТ* или *поступательного движения ТТ* в решаемых задачах не было необходимости рассматривать действие сил на тело, т.е. для их решения достаточно было рассмотреть кинематические характеристики движения тел (**величины** кинематики) и использовать **законы движения** кинематики. Назовем эти задачи задачами кинематики.

Практическое занятие №1В. Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела

Движение материальной точки по окружности – это такое движение материальной точки, при котором его траектория представляет собой окружность.

Вращательное движение твердого тела – это такое движение твердого тела, при котором все его точки совершают движение по концентрическим окружностям. Очевидно, что исследование данного движения можно свести к исследованию движения материальной точки по окружности, если речь будет идти о точках вращающегося твердого тела!

Если тело вращается, то рассматривают движение тех точек твердого тела, которые лежат на определенном расстоянии R от неподвижной точки (или оси), вокруг которой происходит их вращение: свойство всех точек вращающегося твердого тела – они совершают одинаковые угловые перемещения с одинаковыми угловой скоростью и угловым ускорением.

Рассмотрим задачи, условие и требование которых предполагает проведение *исследования движения материальной точки по окружности и вращательного движения твердого тела*. А что означает исследовать эти движения?

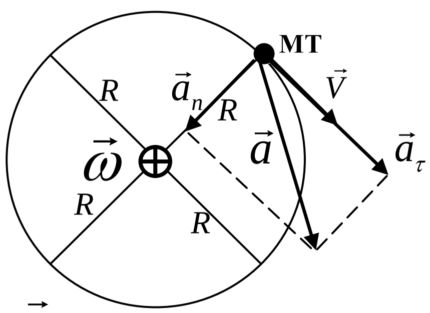
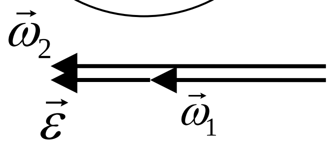
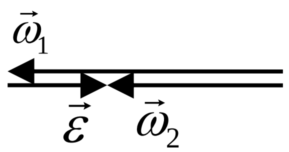
В первую очередь, исследовать означает выбрать характеристики, которые могут описать рассматриваемые движения. Какими **величинами** можно описать *движение МТ по окружности или вращение ТТ*? Их можно описать с помощью таких величин *кинематики* (характеристик движения), как угловое перемещение (угол поворота), угловая скорость, угловое ускорение. Только для *точек* вращающегося ТТ или МТ, движущейся по окружности, остаются применимы линейные характеристики – перемещение, путь, скорость, ускорение, нормальное ускорение, тангенциальное ускорение, для описания вращения ТТ в целом они не применимы. Формулы *определения* **величин** – угловых характеристик – запишем в крайний правый столбец табл.1.3 под заголовок «Величины». Запишем в этом столбце и характеристики, которые применимы к описанию только *равномерного движения* МТ по окружности или точек вращающегося ТТ. Будем считать *равномерным движением по окружности МТ* – движение, при котором модуль линейной скорости МТ остается постоянным.

В табл.1.3 изображена **модель** движения МТ по окружности, при этом для изображения в таблицах и задачах векторов, которые распологаются перпендикулярно плоскости листа, будем использовать символы «острия» («к нам») и «оперенья» («от нас») вектора:

Так вектор угловой скорости движения МТ $\vec{\omega}$ направлен «от нас», поскольку с острия вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ движение МТ должно наблюдаться против часовой стрелки. Вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ будет направлен «к нам», если вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ уменьшается с течением времени, и вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ будет направлен «от нас», если вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ увеличивается с течением времени. Как соотносятся вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ в обоих этих случаях изображено в среднем столбце табл.1.3.

Во вторую очередь, исследовать движение означает определить закономерности, которым оно подчиняется. Каким **закономерностям** подчиняется вращение тела? Для него существуют уравнения, аналогичные кинематическим уравнениям поступательного движения ТТ (табл.1.2, первый столбец). Это зависимости углового перемещения и угловой скорости тела от времени – *кинематические уравнения вращательного движения* (**законы** движения), запишем их в крайний левый столбец табл.1.3 под заголовком «Законы». В среднем, вспомогательном, столбце табл.1.3 под заголовком «Следствия, модели, связи» запишем *следствия* из законов движения – кинематические уравнения для МТ, движущейся равномерно по окружности, а также запишем *уравнения связи* между линейными и угловыми характеристиками движения в этом случае.

Таблица 0.3. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Законы	**Следствия, модели, связи**	**Величины**
$\vec{\varepsilon} = const$ $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$	  	$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, $\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, $\langle\vec{\varepsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$, $N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ $(\vec{a}_n = \frac{V^2}{R}\vec{n}$, $\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{\tau})$
	Равномерное движение точек по окружности ($V = const$):	

	$S = Vt$ $\Delta\varphi = \omega t$ $\boxed{T, \nu, \omega}$! «знаю одну величину – знаю три»	$T = ?$ $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ или $T = \dfrac{2\pi R}{V}$ $\nu = \dfrac{1}{T}$
	Связь между линейными и угловыми характеристиками точек по окружности в любом движении: $V = \omega \cdot R$, $a_n = \omega^2 R$, $a_\tau = \varepsilon \cdot R$.	

Замечания к табл.1.3. Обратите внимание, что линейные характеристики перемещение $\Delta\vec{r}$, скорость $\vec{V}$, ускорение $\vec{a}$ характеризуют движение точек твердого тела, а потому *будут разными для точек, находящихся на разных расстояниях от оси вращения*, а угловые характеристики угловое перемещение $\Delta\varphi$ (угол поворота), угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – *одинаковые для всех точек твердого тела* (поэтому их называют характеристиками вращения твердого тела).

Все указанные в табл.1.3 формулы применяют для описания движения материальной точки по окружности.

В третью очередь, исследовать движение означает определить искомые величины (указанные в требованиях задачи), выбрав для этого определенный **метод** исследования, используя знания о законах движения и его особенностях. **Какие методы решения задач используют** при исследовании движения МТ по окружности или вращательного движения ТТ? Такие же, как и при исследовании любого другого движения, поскольку закономерности любого вида механического движения одни и те же и описываются они одинаковыми уравнениями и законами. Напомним, что для того, чтобы обнаружить этот факт, необходимо рассмотреть частные случаи движений с помощью уравнений кинематики (§2.1), потом исследовать эти же движения с помощью законов динамики (§2.2) и обобщить методы решения задач на уровне механических явлений – механического движения или механического взаимодействия тел (§2.3).

Если применяем законы кинематики к исследованию движения МТ по окружности или вращательного движения ТТ, то основные методы решения задач аналогичны методам решения задач кинематики, рассматривающих поступательное движение (см. практическое занятие №1).

Два основных метода решения задач кинематики:

1. Если закон движения задан (уравнение с числовыми коэффициентами) – для определения искомых величин необходимо использовать этот закон в определении искомых величин кинематики и уравнениях связи, иначе,

необходимо определить искомые величины через *уравнения связи* и/или с помощью *определений величин* (второй и третий столбцы табл.2.3).

2. **Если закон движения не задан – для определения искомых величин необходимо «создать» (записать) закон движения** (уравнение с числовыми коэффициентами). При этом необходимо проанализировать, является ли ускорение постоянным, если – да, то можно записать в общем виде полученный для случая $\vec{\varepsilon} = const$ *закон движения* (первый столбец табл.2.3) и определить для него числовые коэффициенты. Для определения числовых коэффициентов в законе движения часто используют *начальные условия* (*значения угла поворота/угловой скорости в момент времени, равный нулю*) или данные о текущих значениях угла поворота/угловой скорости и времени. После того, как закон будет «создан», при необходимости перейти к пункту 1.

Каким закономерностям подчиняется любое движение? 1. Существует зависимость кинематических характеристик движения тела от времени. Она отражается в законах кинематики (кинематических уравнениях). В наших таблицах законы указываются в крайнем левом столбце таблиц. Средний вспомогательный столбец таблиц служит местом, где указываются соответствующие моделям уравнения – следствия из законов кинематики (кинематических уравнений), в этом столбце изображаются модели явлений и объектов, указываются уравнения связи между величинами, поэтому средний столбец назван «Следствия, модели, связи».

Поступательное движение тел. Взаимодействие поступательно движущихся тел (динамика)

Практическое занятие №2А. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела (законы Ньютона)

Механическое состояние – это такая форма движения тела, при котором оно движется без взаимодействия с другими телами («свободное движение»[10]), в этом случае тело движется равномерно и прямолинейно[11]. Равномерное и прямолинейное движения тела – это движение без ускорения. Можно сделать вывод: без взаимодействия – без ускорения.

Особое свойство всех тел – стремиться «сохранить» свое механическое состояние (*первый закон Ньютона*). Свойство тел – стремиться сохранить свое механическое состояние при взаимодействии с другими телами – *инертность*. Количественная мера инертности тел – *масса* (инертная). Движение, при котором в явном виде проявляется свойство инертности, называют *движением по инерции*. *Инерциальная система отсчета* – система отсчета, в которой в отсутствие взаимодействия с другими телами тело сохраняет свое механическое состояние. Инерциальной будет любая система отсчета, которая связана с телом, движущимся равномерно и прямолинейно или покоящимся. К механическому состоянию относят и состояние покоя тела, поскольку покой и равномерное прямолинейное движение тела

[10] Не путать со свободным падением.
[11] Если нет или не учитывается вращение тела.

неразличимы никакими физическими опытами, если объект опытов покоится или движется равномерно и прямолинейно. *Неинерциальная система отсчета* - система отсчета, в которой в отсутствии взаимодействия с другими телами тело не сохраняет свое механическое состояние, иначе в отсутствии взаимодействия тело движется с ускорением. Неинерциальной системой отсчета будет любая система отсчета, которая связана с телом, движущимся с ускорением.

Предполагается, что исследуемые физические явления рассматриваются относительно *инерциальной системы отсчета*, кроме специально оговоренных случаев!

Количественная мера взаимодействия тела с другими телами – *сила*. *Сила* всегда имеет точку приложения и направление действия (величина – векторная). Если сила действует на ТТ, то вектор силы можно переносить вдоль линии ее действия, в случае МТ такой перенос не имеет смысла: «теряется» точка приложения силы.

Если рассматривается действие нескольких сил, то их действие может быть заменено действием одной силы – *равнодействующей* (эквивалентной действию совокупности всех действующих на тело сил).

Если на тело действует сила – она обязательно вызовет изменение механического состояния тела, иначе, она обязательно вызовет ускорение тела. В том случае, когда под действием силы тело совершает перемещение, не перпендикулярное вектору силы, сила вызывает изменение кинетической энергии тела – сила совершает работу. Следовательно, характеристики механического состояния тела – *импульс тела* и *кинетическая энергия тела*. А характеристики взаимодействия тел – *сила* и *работа силы*. Законы, отражающие изменение механического состояния тела под действием силы – *второй закон Ньютона* и *теорема об изменении кинетической энергии*.

Изменение импульса тела, происходящее *при постоянной массе,* означает изменение скорости тела. Изменение скорости тела характеризуется ускорением, отличным от нуля. В случае, если масса – величина постоянная, можно от второго закона Ньютона в дифференциальной форме перейти ко второму закону Ньютона в форме, физический смысл которой заключается в том, что действие на тело силы, отличной от нуля, всегда приводит к появлению ускорения тела. Назовем эту форму II закона Ньютона – основным законом динамики поступательного движения

Чтобы описать *движение СМТ* необходимо описать движение ее точки *центра инерции* (или центра масс в однородном поле тяготения) (свойство движения точки *центра инерции* – она движется так, как будто в ней сосредоточена вся масса системы, получаемый при этом импульс точки центра инерции с учетом суммарной массы СМТ равен импульсу СМТ.

В природе существует только взаимодействие тел, не бывает «однонаправленного» действия. Взаимодействие двух тел приводит к тому, что всегда возникает пара сил, действующих на каждое тело отдельно, равных по модулю и направленных противоположно вдоль линии действия (*третий закон Ньютона*).

Рассмотрим задачи, условие и требование которых предполагает проведение исследования криволинейного движения МТ и поступательного движения ТТ с помощью законов Ньютона.

Характеристика, которая может описать движение тела в случае исследования криволинейного движения МТ и поступательного движения ТТ с помощью законов Ньютона – импульс тела, характеристика, которая может описать взаимодействие тел в этом случае – сила, характеристика инертности тела при его поступательном движении – масса. Заметим, что при поиске формулы определения силы и массы мы не обнаружим математического выражения, отражающего по существу их физический смысл или указывающего на универсальный способ их нахождения в любом виде движения тел и их взаимодействий. Можем найти только формулы для нахождения силы и массы, указывающие на способы количественного определения их в конкретных ситуациях, поэтому в третьем столбце величины силы и массы изображены в виде «F=?» и «m=?».

Отметим, что необходимо различать импульс $\vec{p}$ МТ и импульс $\vec{p}_C$ ТТ, второй может быть выражен через скорость точки центра масс $\vec{V}_C$. Запишем перечисленные **величины** в третий столбец табл.2.4 («Величины»).

Каким **законам** подчиняется движение, на этот вопрос мы уже ответили. Это первый закон Ньютона, второй закон Ньютона, третий закон Ньютона. Запишем второй закон Ньютона в дифференциальной форме и основной закон динамики поступательного движения в крайний левый столбец табл.2.4 («Законы»). Запишем в этом же столбце законы динамики движения центра инерции твердого тела и третий закон Ньютона.

В среднем вспомогательном столбце табл.2.4 («Следствия, модели, связи») запишем законы, отражающие виды взаимодействий в природе[12]: закон Всемирного тяготения – сила тяготения, а вблизи Земли – сила тяжести $\boldsymbol{F_{тяж}}$, три силы упругости (закон Гука – сила упругости пружины $\boldsymbol{F_{упр}}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$), закон Амонта-Кулона – сила трения $\boldsymbol{F_{тр}}$. Обратите внимание, что силы натяжения нити и реакции опоры не имеют формул для определения, их значение можно определить, только применяя метод решения задач на основе использования законов динамики.

Метод решения задач, условие и требование которых предполагает проведение *исследования криволинейного движения МТ и поступательного движения ТТ* с учетом сил взаимодействий **основан на использовании законов динамики – законов Ньютона и теоремы об изменении кинетической энергии (или закона сохранения механической энергии)**. Особенности применения *законов Ньютона* рассмотрим на этом практическом занятии. На следующем практическом занятии рассмотрим решение задач на основе использования *теоремы об изменении кинетической энергии (или закона сохранения энергии*).

[12] Возможно, законы, раскрывающие природу сил, должны были быть записаны в первом столбце табл.2.4 («Законы»), но тогда с точки зрения метода решения задач необходимо выделить еще один самостоятельный столбец таблицы «Законы динамики», чтобы показать, что основные законы динамики не учитывают природу сил и с этих позиций являются универсальными.

В нижней части табл.2.4 записаны **величины**: 1) *энергетическая* характеристика, описывающая механическое состояние тела в рассматриваемых случаях движения (*криволинейное движение МТ и поступательное движение ТТ) – кинетическая энергия тела*, 2) характеристики, которые могут описать *взаимодействие тел* «языком энергий» (энергию, приобретаемую телом при взаимодействии) – *работа силы, мощность, к.п.д*; а также «энергетические» **законы** – *теорема об изменении кинетической энергии* и *закон сохранения механической энергии*. Кроме этого, в среднем столбце под заголовком «Следствия, модели, связи» записаны формулы для определения потенциальной энергии в зависимости от вида взаимодействия тел.

Таблица 2.4. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Законы	**Следствия, модели, связи**	**Величины**
$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$ $m = const$ $\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$ $\boxed{\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}}$ $m = const$ $\boxed{\vec{a}_c = \frac{\vec{F}}{m}}$ $\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$	Силы в природе: 1) $F_{ТЯЖ} = mg$ (направлена *к центру Земли*), $F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$ 2) $F_{УПР} = -k\Delta x$ (направлена *противоположно смещению*) $T=?$ (направлена *вдоль нити*) $N=?$ (направлена *перпендикулярно опоре*) 3) $F_{ТР} = \mu N$ (направлена *противоположно вектору скорости*)	$F = ?$ $m = ?$ $\vec{p} = m\vec{V}$ $\vec{p}_C = m\vec{V}_C$
$\boxed{A = \Delta W_{кин.}}$ $A_{НПС} = 0$ $\boxed{W_{ПОЛН} = const}$ $\boxed{\Delta W_{КИН} = -\Delta W_{ПОТ}}$	$A_{ПС} = -\Delta W_{ПОТ}$ $W_{ПОТ} = ?\begin{cases} W_{ПОТ} = mgh + C \\ W_{ПОТ} = G\frac{mM}{r} + C \\ W_{ПОТ} = \frac{kx^2}{2} + C \end{cases}$	$\boldsymbol{W_k} = \frac{\boldsymbol{mV}^2}{2}$ $\boldsymbol{A} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \boldsymbol{\vec{F}d\vec{r}}$ $W_{ПОТ} = ?$ $W_{ПОЛН} = W_{КИН} + W_{ПОТ}$ $N = \frac{A}{\Delta t}$ $\eta = \frac{A_{ПОЛЕЗН}}{A_{ЗАТР}}$

Замечание к табл.2.4. Все указанные в табл.2.4 могут быть дополнены не столь уж многими силами – силами взаимодействия электрических зарядов (электрически заряженных тел), взаимодействия проводников с токами, воздействия электрического поля и магнитного поля на электрические заряды, действия магнитного поля на рамку с током.

Почему законы Ньютона и «энергетические законы» помещены в одну таблицу (табл.2.4)? Потому, что они являются отражением одинаковых закономерностей: например, показывают, что происходит с объектом при действии на него силы или в условиях, когда действие всех сил скомпенсировано. Отличие только в том, что законы Ньютона описывают эти закономерности «языком сил», а теорема об изменении кинетической энергии – «языком энергий». Поэтому условно можно считать, что есть два основных подхода к исследованию движений и взаимодействий тел – «силовой» и «энергетический». Напомним, что эти закономерности описывают, что происходит с механическим состоянием тела в условиях действия сил, отсутствии действия сил или когда действие всех сил скомпенсировано.

Метод решения задач с применением второго закона Ньютона:

1. Изобразить с помощью рисунка физическую ситуацию и нарисовать все вектора сил, действующие на каждое тело отдельно.

2. Записать второй закон Ньютона в векторной форме $\sum_{i=1}^{N}\vec{F} = m\vec{a}$

для каждого тела отдельно, раскрывая, какие вектора сил входят в векторную сумму сил.

3. Выбрать оси координат и переписать второй закон Ньютона в проекциях на выбранные оси для каждого тела отдельно. Обратите внимание, что в задачах, где необходимо учесть силу трения, как правило, ее заменяют на математическую формулу (если она существует). Например, использовать для определения силы трения скольжения формулу $F_{ТРСК} = \mu N$.

4. Подставить в полученные уравнения заданные (исходные) числовые значения и решить полученную систему уравнений, то есть из полученных уравнений найти ту величину, которую требуется найти.

Примеры движений тел приведены на рисунке: движение тела по наклонной плоскости и движение тела по вертикали (рис.1).

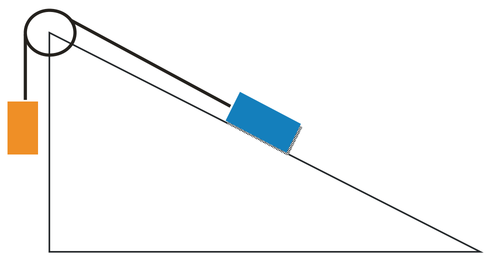


Рис. 1. Пример движения тел.

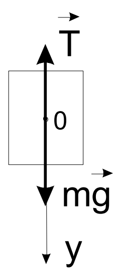


Рис. 2. Вектора сил, действующие на груз, подвешенный на нити, движущийся вертикально вниз.

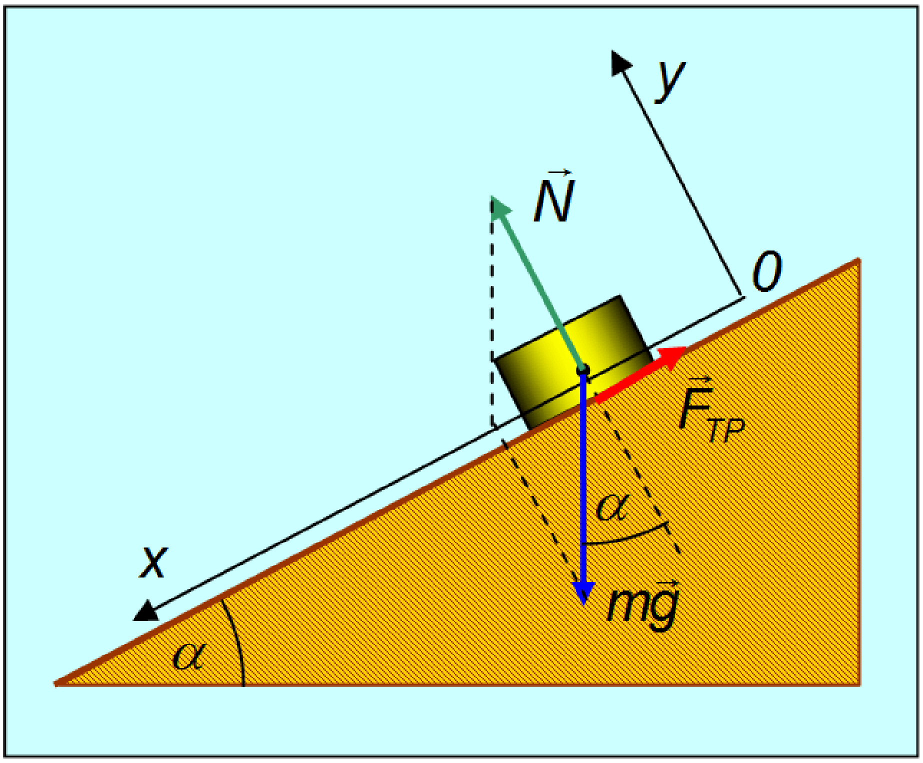


Рис. 3. Вектора сил, действующие на груз, движущийся по наклонной плоскости.

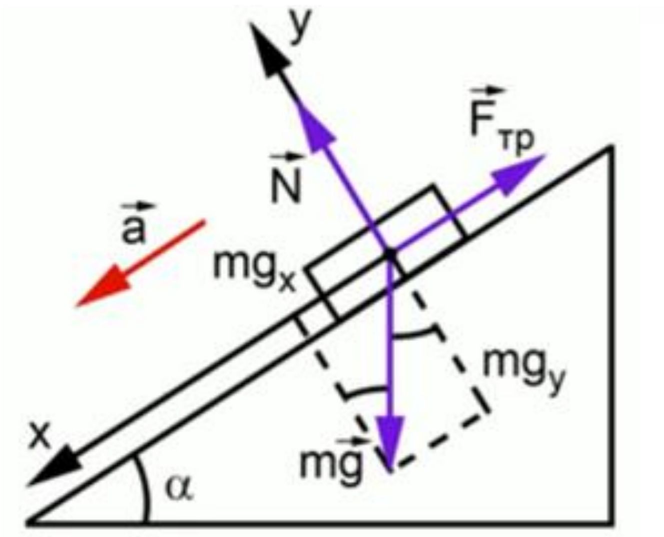


Рис. 3. Разложение на составляющие вектора силы тяжести.

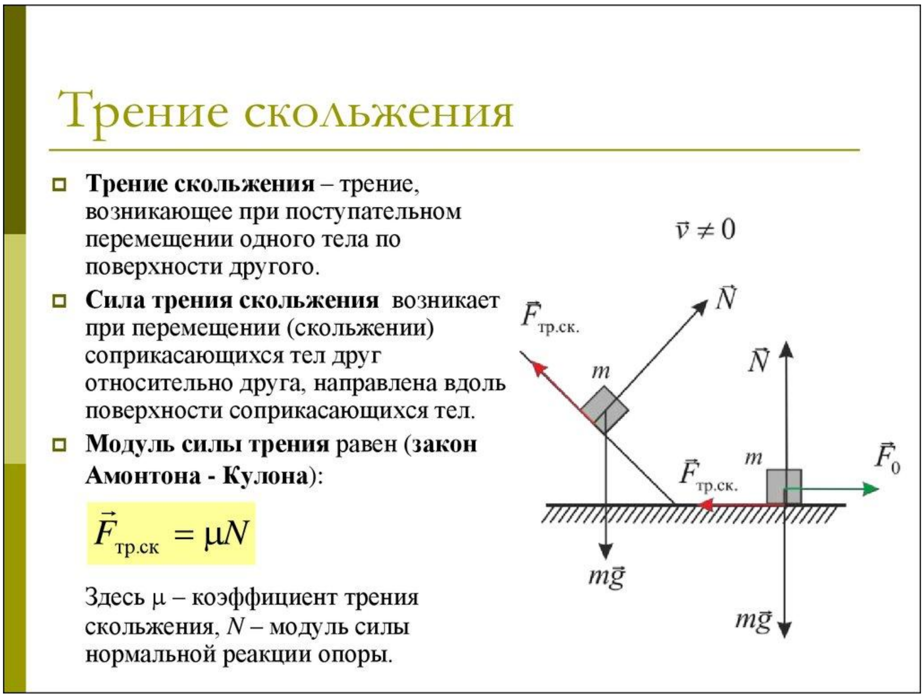
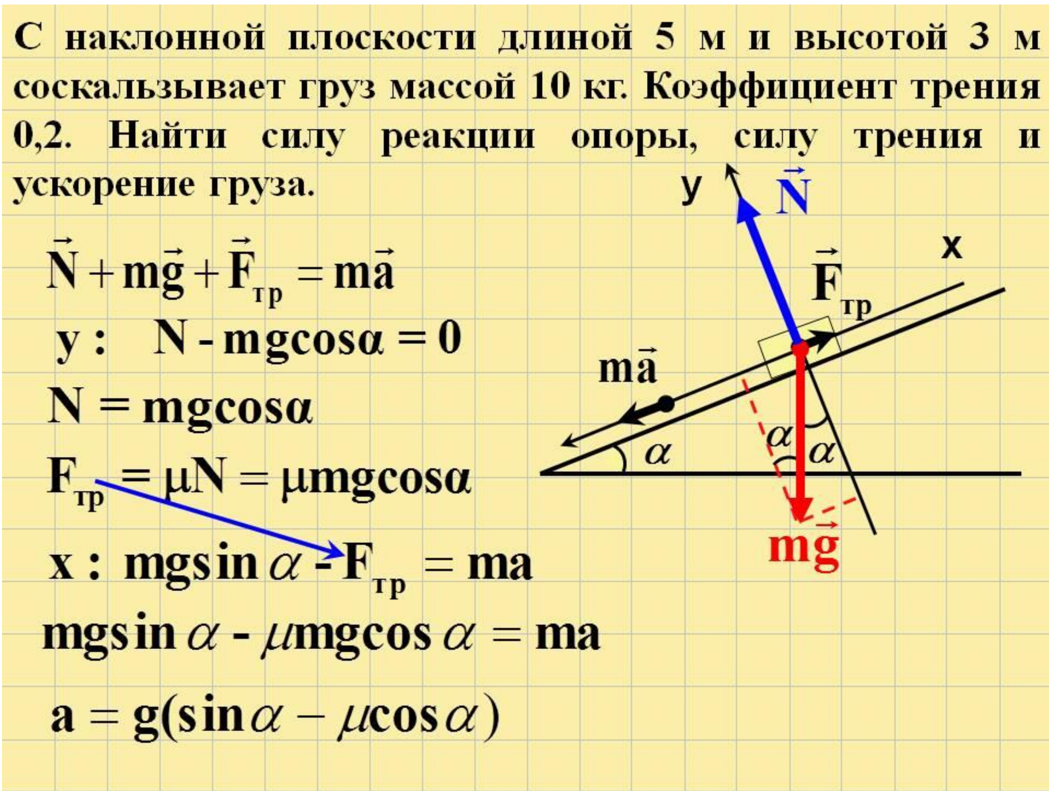


Рис. 4. Найдите ошибку на рисунке.

Пример решения задачи:



Практическое занятие №2В. Криволинейное движение материальной точки и поступательное движение твердого тела (теорема об изменении кинетической энергии, закон сохранения энергии). Раздел готовится**.**

Таблица 2.5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Законы	Следствия, модели, связи	Величины
$\vec{F}_{внешн} = 0$ $\boxed{\vec{p}_s = const}$ $\sum \vec{p}_{i0} = \sum \vec{p}_i$ «ДО» «ПОСЛЕ»	Абсолютно упругое взаимодействие: $m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ $\frac{m_1\vec{V}_{10}^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_{20}^2}{2} = \frac{m_1\vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_2^2}{2}$ Абсолютно неупругое взаимодействие: $m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20} = (m_1 + m_2)\vec{V}$ $\frac{m_1\vec{V}_{10}^2}{2} + \frac{m_2\vec{V}_{20}^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{V}^2}{2} + A_{НПС}$	$\vec{\boldsymbol{p}}_s = \sum_{i=1}^{N} \vec{\boldsymbol{p}}_i$

Вращательное движение тел. Взаимодействие вращающихся тел (динамика)

Практическое занятие №3А. Движение материальной точки по окружности и вращательное движение твердого тела (основной закон динамики вращательного движения)