ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Понятие о дифференциальном уравнении и его решение

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, функцию и ее производную, или дифференциалы.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если входящие в него функции зависят от одного аргумента.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении:

$y'' + 2xy - y^2 = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка;

$y' - xy = x^2$ — дифференциальное уравнение первого порядка.

Функция, обращающая дифференциальное уравнение в тождество, называется решением этого уравнения.

1.2. Дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение и начальные условия

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F\left(x,\, y,\, y'\right) = 0 \tag{1.1}$$

или (если его можно разрешить относительно y') вид

$$y' = f\left(x,\, y\right). \tag{1.2}$$

Решение уравнений (1.1) и (1.2), содержащее произвольную постоянную C, то есть имеющее вид $y = \varphi\ (x,\ C)$, называется общим решением этого уравнения. Если это решение получается в неявной форме $\Phi\ (x, y, C) = 0$, то оно называется общим интегралом уравнений (1.1) и (1.2).

Если придать произвольной постоянной C некоторое фиксированное значение, то из общего решения получим частное решение этого уравнения.

Для уравнения (1.2) справедлива следующая теорема, называемая *теоремой о существовании и единственности решения.*

Теорема. Если в уравнении (1.2) функция $f\ (x,\ y)$ и ее частная производная $f_y'\left(x,\, y\right)$ непрерывны в некоторой области *Д*, содержащей точку $(x_0,\ y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi\ (x)$, удовлетворяющее условию: при $x = x_0$, $y = y_0$.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения уравнения частное решение. Для этого из уравнения $y_0 = \varphi\ (x_0,\ c)$ определяется конкретное решение $C = C_0$, и тогда искомое частное решение имеет вид $y = \varphi\,(x,\ C_0)$.

Задача отыскания частного решения по начальным условиям называется *задачей Коши*.

1.3. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции $P(x,y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной:

$$f_1(x)\, f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0.$$

Путем деления его членов на $f_2(y)\cdot\varphi_2(x)$, переменные разделяются

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0 \quad \left(f_2(y)\neq 0 \quad \varphi_2(x)\neq 0\right).$$

Решение этого уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = C \quad C = const.$$

Примеры

1. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right)dy = 0.$$

Разделим обе части на выражение $\left(1+y^2\right)\left(1+x^2\right)$:

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{dy}{1+y^2} = 0$$

$$arctg\, x + arctg\, y = C.$$

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$2\left(1+e^x\right)y\cdot y' = e^x \qquad y(0) = 0.$$

Найдем общее решение:

$$2\left(1+e^x\right)y\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \text{умножим обе части на } dx,$$

$$2\left(1+e^x\right)ydy = e^x dx \text{ разделим обе части на } (1+e^x),$$

$$2ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx, \qquad 2\int ydy = \int\frac{e^x dx}{1+e^x},$$

$$y^2 = \int \frac{d\left(e^x + 1\right)}{1 + e^x}, \qquad y^2 = \ln\left|1 + e^x\right| + C.$$

Найдем частное решение при $y(0) = 0$.

Подставим вместо x и y начальные условия.

Найдем значение C:

$$0 = \ln\left|1 + e^0\right| + C, \qquad 0 = \ln 2 + C$$

$$C = -\ln 2, \qquad y^2 = \ln\left|1 + e^x\right| - \ln 2$$

$$y^2 = \ln\left|\frac{1 + e^x}{2}\right|$$ — искомое решение.