## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Кроме алгебраической (1) и геометрической (2) форм комплексного числа используют еще *тригонометрическую* и *показательную* формы.

*Тригонометрической* формой комплексного числа $\alpha$ называют запись этого числа в виде

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{3}$$

где $r = |\alpha|$ — модуль;

$\varphi = Arg\alpha$ — аргумент комплексного числа $\alpha$.

Геометрический смысл чисел $r$ и $\varphi$ указан на рисунке 2, где $\varphi = \left(\overline{Ox}\hat{,}\overline{O\alpha}\right)$ — угол между осью $Ox$ и лучом $O\alpha$, а $r = |O\alpha|$ — расстояние от начала координат до точки $\alpha$.

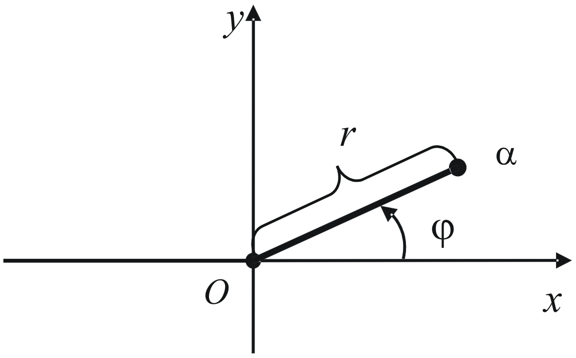


*Рис. 2. Геометрический смысл чисел $r$ и $\varphi$*

Модуль комплексного числа $\alpha = a + bi$ вычисляют по формуле

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{4}$$

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. То значение аргумента $\varphi$, которое удовлетворяет условию $-\pi < \varphi \le \pi$, называют *главным значением аргумента* и обозначают через $\arg\alpha$.

Очевидно, что $Arg\alpha$ и $arg\,\alpha$ связаны условием

$$Arg\alpha = \arg\alpha + 2\pi k, \quad k \in Z\,.$$

Далее словом «аргумент» мы будем называть именно главное значение аргумента и вычислять его для числа $\alpha = a + bi$ по формуле

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a} & \text{ï ðè } a > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{b}{a} & \text{ï ðè } a < 0, b \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{b}{a} & \text{ï ðè } a < 0, b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ï ðè } a = 0, b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{ï ðè } a = 0, b < 0, \\ \text{í å î ï ðåäåëÿåò ñÿ ï ðè à} = 0, b = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Так как по формуле Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi},$$

то, используя (3), число $\alpha$ можно записать в виде

$$\alpha = re^{i\varphi}. \qquad (6)$$

Выражение (6) называют *показательной* формой комплексного числа $\alpha$.

Таким образом, всякое комплексное число $\alpha$ (кроме нулевого) можно представить в любой из форм:

$$\alpha = \left[\begin{array}{ll} a + bi & \text{— алгебраической} \\ (a;b) & \text{— геометрической (точка или вектор)} \\ r(\cos\varphi + i\sin\varphi) & \text{— тригонометрической} \\ re^{i\varphi} & \text{— показательной} \end{array}\right.$$

**Пример 2.** Записать число $\alpha = 4 + 4i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Очевидно, что для $\alpha = 4 + 4i$ $a = 4$, $b = 4$. По формуле (4) находим модуль числа $r = |\alpha| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Аргумент числа $\alpha$ находим по формуле (5) (используем первую строку формулы, т.к. $a > 0$): $\varphi = arctg\dfrac{4}{4} = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Следовательно, можем записать:

$$\alpha = 4 + 4i = 4\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

показательная форма

тригонометрическая форма

алгебраическая форма

Аналогично получим (проверьте):

$$\alpha_1 = 3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$\alpha_2 = 5 = 5\left(\cos 0 + i\sin 0\right) = 5e^{i0},$$

$$\alpha_3 = -2 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2e^{i\pi},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right) = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}.$$