П р и м е р 1. Найти интегралы:

а) $\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx$;

б) $\int \left(\dfrac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \dfrac{2}{\cos^2 x} \right) dx$;

в) $\int (\cos 5x - \sin 3x + 7^{2x})dx.$

Решение.

а) Подынтегральная функция представляет собой алгебраическую сумму функций, которые представляют собой произведение числа на степенную функцию.

$$\int (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx = 5\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + 3\int x dx - 2\int dx =$$

$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} - 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3\frac{x^{1+1}}{1+1} - 2x + C =$$

$$= x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

Сделаем проверку:

$$d(x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C) = (x^5 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C)' dx = (5x^4 - 6x^2 + 3x - 2)dx.$$

Получили подынтегральное выражение, следовательно, интеграл найден правильно.

$$б) \int (\frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2}{\cos^2 x})dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3\arcsin\frac{x}{2} - 2tgx + C.$$

$$в) \int (\cos 5x - \sin 3x + 7^{2x})dx = \int \cos 5x dx - \int \sin 3x dx + \int 7^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\frac{7^{2x}}{\ln 7} + C.$$

П р и м е р 2. Найти интегралы:

а) $\int (3x+2)^5 dx$;

б) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$;

Решение.

а) Произведём подстановку $3x + 2 = u$. Возьмём дифференциалы от обеих частей равенства $(3x+2)' dx = du$ или $3dx = du$. Отсюда $dx = \dfrac{du}{3}$. Заменив в искомом интеграле $(3x+2)$ и dx их найденными значениями, получим:

$$\int (3x+2)^5 dx = \begin{bmatrix} 3x+2=u \\ 3dx=du \\ dx=\dfrac{du}{3} \end{bmatrix} = \int u^5 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^5 du = \frac{1}{3}\frac{u^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{18}u^6 + C =$$

$$= \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C;$$

Сделаем проверку:

$$\left(\frac{1}{18}(3x+2)^6 + C\right)' = \frac{6}{18}(3x+2)^5 \cdot (3x+2)' = \frac{1}{3}(3x+2)^5 \cdot 3 = (3x+2)^5$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

б) Произведём подстановку $2x^3+1=u$. Возьмём дифференциалы от обеих частей равенства $6x^2dx=du$. Отсюда $x^2dx=\dfrac{du}{6}$. Заменив в искомом интеграле $(2x^3+1)$ и x^2dx, получим:

$$\int (2x^3+1)^4 x^2 dx = \begin{bmatrix} 2x^3+1=u \\ 6x^2dx=du \\ x^2dx=\dfrac{du}{6} \end{bmatrix} = \int u^4 \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^4 du = \frac{1}{6}\frac{u^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{30}u^5 + C =$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+1)^5 + C;$$

П р и м е р 3. Найти интегралы:

а) $\int (x+5)e^x dx$;

б) $\int x^3 \ln x dx$.

Решение.

а) Положим $u=x+5$, $dv=e^x dx$. Тогда $du=dx$, $v=\int e^x dx = e^x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int (x+5)e^x dx = (x+5)e^x - \int e^x dx = (x+5)e^x - e^x + C = e^x(x-4) + C.$$

б) Положим $u=\ln x$, $dv=x^3dx$. Тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\int x^3dx = \dfrac{x^4}{4}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\cdot \ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C.$$

Пример 4. Найти неопределенные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

а) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

б) $\int e^{x^5}x^4dx$;

в) $\int(4x+1)\sin 3xdx$.

Решение.

а) $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$.

Применим формулу интегрирования $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, получим:

$$\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^5}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=4\int x^{-2}dx-\frac{1}{2}\int x^{\frac{5}{3}}dx+6\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=4\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}}+6\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(-\frac{4}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{16}+9\sqrt[3]{x^2}+C\right)'=-4\left(\frac{1}{x}\right)'-\frac{3}{16}\left(x^{\frac{8}{3}}\right)'+9\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'+C'=$$

$$=-4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{3}{16}\cdot\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}+9\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{x^5}}{2}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

б) $\int e^{x^5}x^4dx$.

Применим способ замены переменной:

$$\int e^{x^5}x^4dx=\left[\begin{array}{l}u=x^5,\\ du=5x^4dx,\\ x^4dx=\frac{1}{5}du\end{array}\right]=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+C=\frac{1}{5}e^{x^5}+C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(\frac{1}{5}e^{x^5}+C\right)'=\frac{1}{5}\left(e^{x^5}\right)'+C'=\frac{1}{5}e^{x^5}\left(x^5\right)'=\frac{1}{5}e^{x^5}5x^4=e^{x^5}x^4.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

в) $\int(4x+1)\sin 3xdx$.

Применим формулу интегрирования по частям
$\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int (4x+1)\sin 3xdx = \left[\begin{matrix} u = 4x+1, & du = 4dx \\ dv = \sin 3xdx, & v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right] =$$

$$= -\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3}\int \cos 3xdx =$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C =$$

$$-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{9}\sin 3x + C.$$

Сделаем проверку, для этого найдем производную:

$$\left(-\frac{1}{3}(4x+1)\cos 3x + \frac{4}{9}\sin 3x + C\right)' =$$

$$-\frac{1}{3}\left((4x+1)'\cos 3x + (4x+1)(\cos 3x)'\right) + \frac{4}{9}(\sin 3x)' + C' =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(4\cos 3x + (4x+1)(-\sin 3x)(3x)'\right) + \frac{4}{9}\cos 3x(3x)' =$$

$$= -\frac{1}{3}(4\cos 3x - 3(4x+1)\sin 3x) + \frac{4}{3}\cos 3x =$$

$$= -\frac{4}{3}\cos 3x + (4x+1)\sin 3x + \frac{4}{3}\cos 3x = (4x+1)\sin 3x.$$

Получили подынтегральную функцию, следовательно, интеграл найден правильно.

Задачи для самостоятельного решения:

1) Найти интегралы:

а) $\int \left(3x^4 - \sqrt[5]{x^3} - x\right)dx$; *б)* $\int \left(\frac{1}{x^5} + x\sqrt{x} + 5\right)dx$

в) $\int \left(\frac{4}{x} - 7^x + 3x\right)dx$; *г)* $\int \left(\cos\frac{x}{5} - \sin 8x + 4^{3x}\right)dx$;

2) Найти интегралы, пользуясь методом замены переменной:

а) $\int (7x-4)^5 dx$; *б)* $\int \frac{dx}{6x-5}dx$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(4x+5)^3}}$; *г)* $\int e^{5x-3}dx$;

д) $\int \cos(3x-7)dx$; *е)* $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$;

3) Найти интегралы, пользуясь методом замены переменной:

а) $\int \frac{x^3dx}{3x^4+2}$; *б)* $\int x\sqrt{4-3x^2}\,dx$;

в) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$; *г)* $\int e^{1-x^2}xdx$.

4) Найти интегралы, применяя формулу интегрирования по частям:

а) $\int (2x-3)\cos x dx$; *б)* $\int xe^{-x}dx$;

в) $\int x\sin 5x dx$; *г)* $\int x\ln x dx$.

Ответы:

1) *а)* $\frac{3x^5}{5}-\frac{5\sqrt[5]{x^8}}{8}-\frac{x^2}{2}+C$; *б)* $-\frac{1}{4x^4}+\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+5x+C$;

в) $4\ln|x|-\frac{7^x}{\ln 7}+\frac{3x^2}{2}+C$; *г)* $5\sin\frac{x}{5}+\frac{1}{8}\cos 8x+\frac{4^{3x}}{3\ln 4}+C$.

2) *а)* $\frac{(7x-4)^6}{42}+C$; *б)* $\frac{1}{6}\ln|6x-5|+C$;

в) $\sqrt[4]{4x+5}+C$; *г)* $\frac{1}{5}e^{5x-3}+C$;

д) $\frac{1}{3}\sin(3x-7)+C$; *е)* $-\frac{1}{3}ctg(3x-1)+C$.

3) *а)* $\frac{1}{12}\ln(3x^4+2)+C$; *б)* $-\frac{\sqrt{(4-3x^2)^3}}{9}+C$;

в) $\frac{1}{3\cos^3 x}+C$; *г)* $-\frac{e^{1-x^2}}{2}+C$.

4) *а)* $(2x-3)\sin x+2\cos x+C$; *б)* $-e^{-x}(x+1)+C$;

в) $-\frac{1}{5}x\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C$; *г)* $\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$.