Непрерывность функции в точке и на интервале

Краткие теоретические сведения:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x — два произвольных значения аргумента из этого интервала.

Приращением аргумента x называется разность $\Delta x = x - x_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$.

Приращением Δy *функции* $y = f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0, называется разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Из определения непрерывности функции в точке следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если ее предел в точке x_0 существует и равен ее значению в этой точке, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то эту точку называют *точкой разрыва* функции.

Например, рассмотрим функцию $y = \dfrac{1}{x}$. $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. В точке $x = 0$ функция не определена, поэтому $x = 0$ — точка разрыва функции.

Свойства функций, непрерывных в точке:

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. то их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

2. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = g(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Теорема: Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения

Например, $y = \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x^2 + 5}$ — элементарная функция. Она определена при любом значении аргумента x, значит, она и непрерывна при любом значении аргумента x.