П р и м е р 1. Вычислить значение функции $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{2x-5}$ при $x=3$.

Решение.

Чтобы найти значение функции при данном значении аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента принимаемое им значение. Имеем:

$$f(3)=\frac{3^2-3\cdot 3+2}{2\cdot 3-5}=5.$$

П р и м е р 2. Найти область определения функций:

а) $y=\sqrt{6+x}$;

б) $y=\dfrac{7x}{x^2-4}$;

в) $y=\lg(x+3)$.

Решение.

а) Функция y будет иметь действительные значения тогда, когда подкоренное выражение неотрицательное, то есть $6+x\geq 0$, откуда $x\geq -6$. Следовательно, $D(y)=[-6;+\infty)$.

б) Из области определения функции следует исключить те значения аргумента, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, то есть $x=-2$ и $x=2$. Следовательно, $D(y)=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

в) Логарифм можно вычислить только от положительного числа, поэтому $x+3>0$, откуда $x>-3$. Следовательно, $D(y)=(-3;+\infty)$.

П р и м е р 3. Написать первые пять членов последовательности, общий член которой $x_n=\dfrac{2}{n^2}$.

Решение.

Давая аргументу n значения 1, 2, 3, 4, 5, получим:

$$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{2}{9},\ x_4=\frac{1}{8},\ x_5=\frac{2}{25}.$$

Следовательно, искомая последовательность имеет вид

$$\{x_n\}:\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{25},\ \ldots .$$

Выясним понятие предела последовательности на примере. Рассмотрим числовую последовательность:

$$\{x_n\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots .$$

Замечаем, что члены этой последовательности с ростом n как угодно близко приближаются к единице. При этом абсолютная величина разности между членами последовательности и единицей, то есть $|x_n-1|$, становится все меньше и меньше, то есть с ростом n величина $|x_n-1|$, с некоторого номера члена последовательности, будет меньше сколь угодно малого положительного числа. Это означает, что число 1 является пределом данной последовательности.

П р и м е р 4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3+2x+1\right)$.

Решение.

Для того, чтобы найти предел данной функции, достаточно вместо аргумента x подставить его предельное значение.

$$\lim_{x\to 3}\left(x^3+2x+1\right)=27+6+1=34.$$

П р и м е р 5. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$.

Решение.

а) При $x=3$ числитель и знаменатель данной дроби обращаются в нуль. То есть непосредственная подстановка приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности нужно разложить числитель и знаменатель дроби на множители, тем самым выделить множитель $(x-3)$, сократить дробь на него и вычислить предел оставшегося выражения.

Разложение квадратного трехчлена на множители выполняем по формуле

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),$$

где x_1, x_2 — корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Разложим на множители числитель:

$$5x^2-16x+3=0,$$
$$D=(-16)^2-4\cdot 5\cdot 3=256-60=196,$$
$$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{196}}{2\cdot 5},$$
$$x_1=\frac{16+14}{10}=3,\ x_2=\frac{16-14}{10}=\frac{1}{5};$$
$$5x^2-16x+3=5(x-3)\left(x-\frac{1}{5}\right)=(x-3)(5x-1).$$

Разложим на множители знаменатель:

$$x^2-4x+3=0,$$
$$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4,$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot1},$$
$$x_1=\frac{4+2}{2}=3,\ x_2=\frac{4-2}{2}=1;$$
$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x^2-16x+3}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(5x-1)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x-1}{x-1}=\dfrac{5\cdot3-1}{3-1}=\dfrac{14}{2}=7$.

б) При стремлении x к ∞ получается неопределенное выражение $\dfrac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, надо разделим и числитель, и знаменатель данной дроби на x^2, применяя теоремы о пределах и свойства бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$

в) Непосредственная подстановка приводит к неопределенному выражению $\dfrac{0}{0}$. Для раскрытия этой неопределенности применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{5x}=\frac{5}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=\frac{5}{3}\cdot1=\frac{5}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Найти область определения функций:

a) $y=x^2-5x+7$; *b*) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$;

c) $y=\dfrac{5x}{x^2-4}$; *d*) $y=\dfrac{\lg(x+5)}{x}$.

2) Выяснить четность, нечетность функций:

a) $y=x^2-5\cos x$; *b*) $y=4x^3+2\sin x$.

3) Сложную функцию $y=\lg tgx$ записать в виде цепочки равенств.

4) Сложную функцию $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x$ записать в виде одного равенства.

5) Для функции $y=2x+3$ найти обратную функцию и построить графики этих взаимно-обратных функций.

6) Вычислить пределы:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+6}{2x^2+5}$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-1}{x^2-4x+5}$;

$c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{3x-x^3+5x^2}$; $d)\ \lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4x}$;

$e)\ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4+4x+x^2}{x^3+8}$; $f)\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-3x-5}{1-x^2}$.

7) Вычислить пределы:

$a)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; $b)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{tg4x}$; $c)\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{6}}$.

Ответы:

1) $a)$ $(-\infty;+\infty)$; $b)$ $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$;
$c)$ $(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$; $d)$ $(-5;0)\cup(0;+\infty)$.

2) $a)$ четная; $b)$ нечетная.

3) $y=\lg u$, $u=tgx$.

4) $y=\sqrt{\sin x}$.

5) $y=0{,}5(x-3)$.

6) $a)$ $2{,}5$; $b)$ ∞; $c)$ 0; $d)$ 3; $e)$ 0; $f)$ $-3{,}5$.

7) $a)$ 0,4; $b)$ $\dfrac{5}{4}$; $c)$ 18.