П р и м е р 1. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $A(-3;-2)$ и радиус $R=4$.

Решение.

Подставим координаты центра и значение радиуса окружности в уравнение окружности, получим уравнение искомой окружности:

$$(x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

П р и м е р 2. Составить уравнение окружности с диаметром *AB*, если $A(-5;4)$, $B(-3;2)$.

Решение.

Найдем координаты центра окружности, то есть середину отрезка *AB*

$$x=\frac{-5+(-3)}{2}=\frac{-8}{2}=-4, \text{ и } \; y=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

Итак, $C(-4;3)$ — центр окружности. Радиус окружности *R* равен половине длины отрезка *AB*. Найдем длину отрезка *AB*

$$AB=\sqrt{(-5-(-3))^2+(4-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $R=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Тогда уравнение искомой окружности будет иметь вид:

$$(x+4)^2+(y-3)^2=2.$$

П р и м е р 3. Дано уравнение эллипса $4x^2+9y^2=36$. Требуется найти: *а*) полуоси; б) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет; *д*) построить кривую.

Решение.

Приведем уравнение эллипса к каноническому виду. Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

а) $a^2=9$, $a=3$ — большая полуось, $b^2=4$, $b=2$ — малая полуось.

б) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$ — вершины эллипса.

в) Найдем *c* по формуле связи $c^2=a^2-b^2$, получим $c^2=9-4=5$, $c=\sqrt{5}$. Тогда $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

д) Строим эллипс:

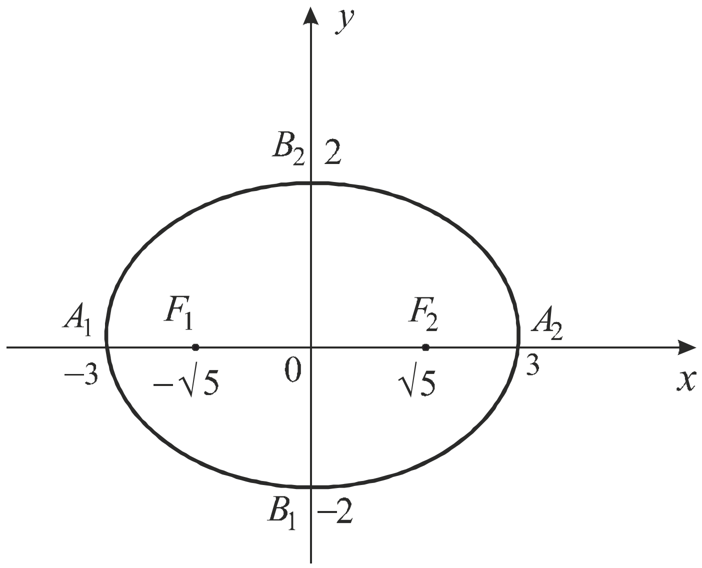

Рис. Изображение эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Пример 4. Написать каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси Ox, и расстояние между ними равно 6, а большая полуось равна 5.

Решение.

По условию задачи $2c=6$, $c=3$ и $a=5$. Найдём малую полуось эллипса b из формулы связи $c^2=a^2-b^2$, получим

$$9=25-b^2,$$
$$b^2=25-9=16.$$

$a^2=25$, $b^2=16$, получим каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Пример 6. Дано уравнение гиперболы $4x^2-9y^2=36$. Требуется найти: *а*) полуоси; *б*) координаты вершин; *в*) координаты фокусов; *г*) эксцентриситет; *д*) уравнения асимптот; *е*) построить кривую.

Решение.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (3.16). Для этого обе части равенства разделим на 36 и выполним сокращения:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$ — каноническое уравнение гиперболы.

а) $a^2=9$, $a=3$ — действительная полуось, $b^2=4$, $b=2$ — мнимая полуось.

б) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$ — вершины гиперболы.

в) Найдем c по формуле связи $c^2=a^2+b^2$, получим $c^2=9+4=13$, $c=\sqrt{13}$.

Тогда $F_1\left(-\sqrt{13};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{13};0\right)$ — фокусы эллипса.

г) Эксцентриситет вычислим по формуле $\varepsilon=\frac{c}{a}$, получим $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

д) Уравнения асимптот: $y = \pm \frac{2}{3} x$.

е) Строим гиперболу:

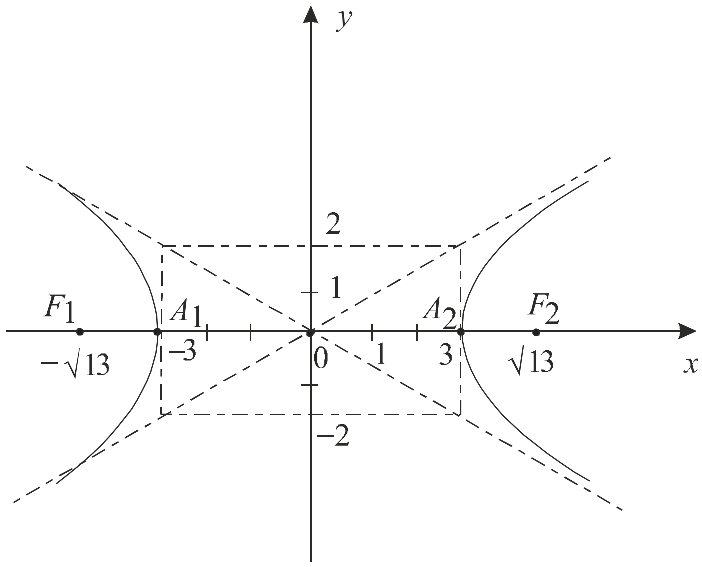

Рис. Изображение гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

П р и м е р 7. Написать каноническое уравнение гиперболы, если межфокусное расстояние равно 10, а действительная полуось $a = 4$.

Решение.

По условию задачи $2c = 10$, $c = 5$ и $a = 4$. Найдём мнимую полуось эллипса b из формулы связи $c^2 = a^2 + b^2$, получим

$$25 = 16 + b^2,$$

$$b^2 = 25 - 16 = 9.$$

Подставляя в уравнение (3.16) $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

П р и м е р 8. Найти уравнение директрисы и координаты фокуса каждой из парабол: a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = -8y$.

Решение.

а) $y^2 = 4x$ — уравнение параболы, симметричной относительно оси О*x*, ветви параболы идут вправо. Из уравнения находим: $2p = 4$, откуда $p = 2$, $\frac{p}{2} = 1$.

Директрисой служит прямая, параллельная оси Оy и отстоящая от последней на расстоянии $\frac{p}{2}=1$. Следовательно, уравнение директрисы параболы будет иметь вид $x=-1$.

Фокус параболы находится на оси Оx, расстояние от фокуса до начала координат $\frac{p}{2}=1$, поэтому $F(1;0)$ — фокус параболы.

b) $x^2=-8y$ — уравнение параболы, симметричной относительно оси Оy, ветви параболы идут вниз. Из уравнения находим: $2p=8$, откуда $p=4$, $\frac{p}{2}=2$.

Директрисой служит прямая, параллельная оси Оx и отстоящая от последней на расстоянии $\frac{p}{2}=2$. Следовательно, уравнение директрисы параболы будет иметь вид $y=2$.

Фокус параболы находится на оси Оy, расстояние от фокуса до начала координат $\frac{p}{2}=2$, поэтому $F(0;-2)$ — фокус параболы.

Пример 9. Написать каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно уравнение её директрисы $x=2$.

Решение.

Так как уравнение директрисы $x=2$, то каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=-2px$. Тогда $\frac{p}{2}=2$, $p=4$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2=-8x$.

Задачи для самостоятельного решения

2) Написать уравнение окружности с центром в точке $C(2;-5)$ и радиусом $R=8$.

3) Найти координаты центра и радиус окружности $x^2+y^2+8x-4y-5=0$.

4) Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2+9y^2=144$. Построить кривую.

5) Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

a) его полуоси $a=6$, $b=4$;

b) расстояние между фокусами, которые лежат на оси Ox, равно 10, а большая ось равна 16;

c) один из фокусов имеет координаты $(-5;0)$, а малая полуось равна 4;

d) большая полуось $a=12$, а эксцентриситет равен 0,5;

e) эллипс проходит через точку $M_1(2;-3)$ и имеет большую полуось $a=4$.

6) Построить гиперболу $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

7) Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если

a) ее фокусы лежат на оси *Ox*, и расстояние между ними равно 10, а длина мнимой оси равна 8;

b) один из ее фокусов имеет координаты $(-13; 0)$, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$;

c) она проходит через точку $M(8\sqrt{5}; 12)$, имеет фокусы, лежащие на оси *Ox*, и ее мнимая полуось равна 6.

8) Построить параболу $y^2 = 6x$. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

9) Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

a) ее фокус имеет координаты $(0; -3)$;

b) уравнение директрисы $x = \frac{5}{8}$;

c) она симметрична относительно оси *Oy* и проходит через точку $C(1; 1)$.

10) Построить параболу $y = -2x^2 + 8x - 5$.

Ответы:

2) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 64$;

3) $C(-4; 2)$, $R = 5$.

4) $a = 6, b = 4, F_1(-2\sqrt{5}, 0), F_2(2\sqrt{5}, 0), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

5) *a*) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$;

b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$;

c) $\frac{x^2}{41} + \frac{y^2}{16} = 1$;

d) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$;

e) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

6) $a = 3$, $b = 4$, $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, $y = \pm\frac{4}{3}x$.

7) $a)\ \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;\ b)\ \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1;\ c)\ \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1;$

8) $F\left(\frac{3}{2};0\right),\ x=-\frac{3}{2}.$

10) $a)\ x^2=-12y;\quad b)\ y^2=-2{,}5x;\quad c)\ x^2=y.$