П р и м е р 1. Определить расстояние между точками $A(-3;7)$ и $B(-6;3)$.

Решение.

Подставляя в формулу (3.1) координаты точек A и B, получим:

$$AB=\sqrt{\left(-6-(-3)\right)^2+\left(3-7\right)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

П р и м е р 2. Даны координаты точек $A(-3;5)$ и $B(6;17)$. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda=\dfrac{AC}{CB}=2$.

Решение.

Подставляя в формулу координаты точек A и B, получим:

$$x=\frac{-3+2\cdot 6}{1+2}=3;\ y=\frac{5+2\cdot 17}{1+2}=13.$$

То есть $C(3;13)$.

П р и м е р 3. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$, $C(-10;-2)$. Найти длину медианы AE.

Решение.

Медиана — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Определим координаты точки E, середины отрезка BC. Подставляя в формулу координаты точек B и C, получим:

$$x=\frac{0+(-10)}{2}=-5 \text{ и } y=\frac{-6+(-2)}{2}=-4,$$

то есть $E(-5;-4)$. $AE=\sqrt{\left(-5-(-1)\right)^2+\left(-4-(-1)\right)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$

П р и м е р 4. Выяснить, лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x+y+3=0$.

Решение.

Подставим в уравнение линии вместо x и y координаты точки K, получим $2\cdot(-2)+1+3=0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, так как $2\cdot 1+1+3\neq 0$.

П р и м е р 4. Дано общее уравнение прямой $2x-5y+10=0$. Написать уравнение этой прямой в отрезках на осях. Построить прямую.

Решение.

Перенесем свободный член уравнения в правую часть:

$$2x-5y=-10.$$

Разделим обе части уравнения на (– 10), получим:

$$\frac{2x}{-10}-\frac{5y}{-10}=1.$$

Выполнив сокращения, получим уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1.$$

Здесь отрезки, отсекаемые прямой на осях $a=-5$, $b=2$. Построим прямую.

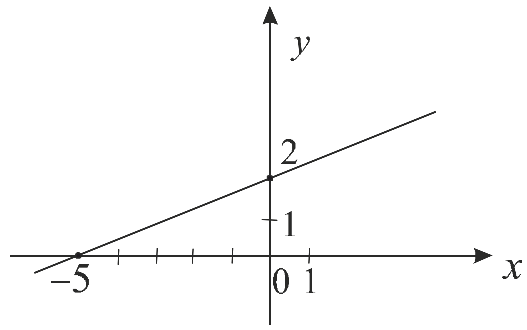

Рис. Изображение прямой $\frac{x}{-5}+\frac{y}{2}=1$.

Пример 5. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=3$, $b=4$.

Решение.

Используя формулу, имеем:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Приведем это уравнение к виду общего уравнения прямой. Для этого умножим обе части уравнения на 12, получим общее уравнение данной прямой:

$$4x+3y-12=0.$$

Пример 6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$ под углом 135° к положительному направлению оси Ox.

Решение.

Найдем угловой коэффициент прямой:

$$k=tg135^\circ=tg\left(180^\circ-45^\circ\right)=-tg45^\circ=-1.$$

Подставим найденное значение $k=-1$ и координаты точки A

$$y+3=-1(x-2),$$

$$y+3=-x+2,$$

$$x+y+1=0.$$

Пример 7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-4;5)$.

Решение.

Для составления уравнения прямой AB подставим в формулу координаты точек A и B:

$$\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-(-3)}{5-(-3)},\qquad \frac{x-2}{-6}=\frac{y+3}{8},$$

$$8(x-2)=-6(y+3),$$

$$4(x-2)=-3(y+3),$$
$$4x-8=-3y-9,$$
$$4x+3y+1=0.$$

П р и м е р 8. Найти точку пересечения двух прямых $2x-3y+5=0$ и $x-5y+6=0$.

Решение.

Решим систему уравнений этих прямых:

$$\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ x-5y=-6. \end{cases}$$

Воспользуемся правилом Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{25-18}{-10+3}=-1,$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-12+5}{-10+3}=1.$$

Итак, прямые пересекаются в точке $(-1;1)$.

П р и м е р 3.9. Определить острый угол между прямыми $y=3x+1$ и $y=-2x-5$.

Решение.

Угловые коэффициенты данных прямых: $k_1=3$, $k_2=-2$. Так как прямые не изображены в системе координат, то

$$tg\varphi=\left|\frac{-2-3}{1+3\cdot(-2)}\right|=\left|\frac{-5}{-5}\right|=|1|=1.$$

Следовательно, $\varphi=arctg1=45^\circ$.

П р и м е р 10. Показать, что прямые $7x+3y-5=0$ и $14x+6y+1=0$ параллельны.

Решение.

Найдем угловые коэффициенты прямых по формуле $k=-\frac{A}{B}$:

$$k_1=-\frac{7}{3} \text{ и } k_2=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}.$$

Угловые коэффициенты прямых равны, следовательно, они параллельны.

Пример 11. Показать, что прямые $2x-3y+7=0$ и $6x+4y-3=0$ перпендикулярны.

Решение.

Найдем угловые коэффициенты прямых по формуле $k=-\frac{A}{B}$:

$$k_1=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3} \text{ и } k_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$$

Угловые коэффициенты прямых противоположны по знаку и обратны по величине, то есть $k_2=-\frac{1}{k_1}$. Следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример 12. Найти расстояние от точки $M(4;-3)$ до прямой $3x+4y-10=0$.

Решение.

$$d=\frac{|3\cdot4+4(-3)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2.$$

Пример 13. Даны координаты вершин треугольника $A(-6;2)$, $B(5;-6)$, $C(3;10)$. Найти:

1) длину стороны *AB* и ее угловой коэффициент;

2) уравнение высоты *CD*;

3) длину высоты *CD*;

4) сделать рисунок.

Решение.

Расстояние между точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Подставив в эту формулу координаты точек *A* и *B*, получим:

$$AB=\sqrt{(5+6)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{121+64}=\sqrt{185}.$$

Составим уравнение прямой *AB*.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Подставив в эту формулу координаты точек *A* и *B*, получим уравнение прямой *AB*:

$$\frac{x+6}{5+6}=\frac{y-2}{-6-2};$$

$$\frac{x+6}{11}=\frac{y-2}{-8};$$

$$-8(x+6)=11(y-2);$$

$$-8x-48=11y-22;$$

$$8x+11y+26=0.$$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой AB разрешим уравнение этой прямой относительно y:

$$11y=-8x-26;$$

$$y=-\frac{8}{11}x-\frac{26}{11}.$$

Отсюда $k_{AB}=-\frac{8}{11}$.

2) Высота CD перпендикулярна стороне AB, поэтому угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку, то есть

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}.$$

Так как $k_{AB}=-\frac{8}{11}$, то $k_{CD}=-\frac{1}{-\frac{8}{11}}=\frac{11}{8}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1)$ в заданном угловым коэффициентом k направлении, имеет вид

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

Подставим в эту формулу координаты точки C и $k=k_{CD}=\frac{11}{8}$, получим уравнение высоты CD:

$$y-10=\frac{11}{8}(x-3);$$

$$8y-80=11x-33;$$

$$11x-8y+47=0.$$

3) Длина высоты CD равна расстоянию от точки C до прямой AB.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Подставим в эту формулу координаты точки C и коэффициенты из уравнения прямой AB, которое имеет вид $8x+11y+26=0$, получим:

$$d=CD=\frac{|8\cdot 3+11\cdot 10+26|}{\sqrt{8^2+11^2}}=\frac{160}{\sqrt{185}}.$$

4) На рисунке в декартовой системе координат xOy изобразим треугольник ABC и высоту CD:

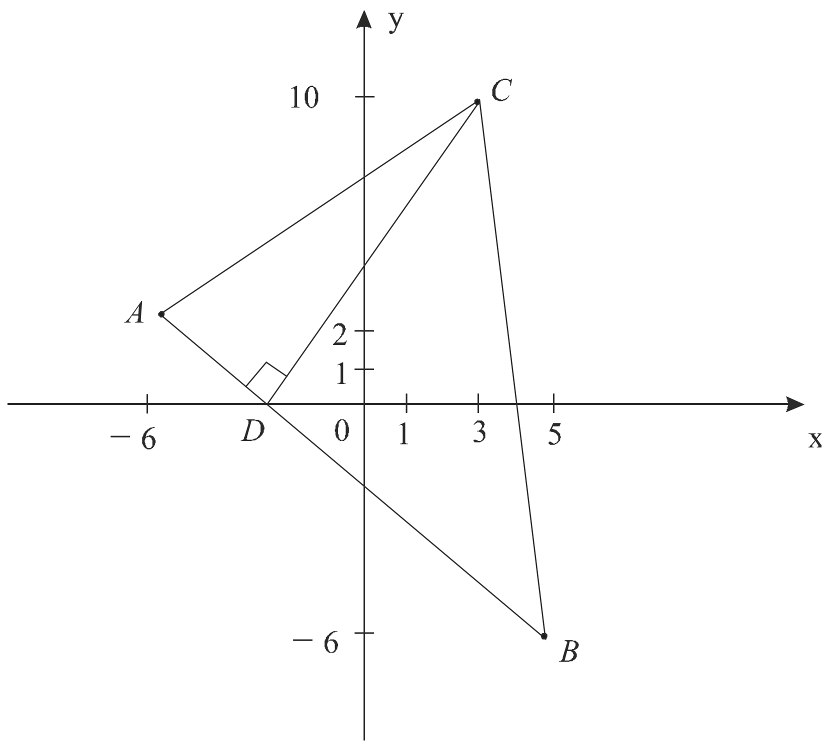

Рис. Изображение треугольника ABC и высоты CD.

Задачи для самостоятельного решения:

1) Построить треугольник по координатам его вершин: $A(-5;2)$, $B(3;1)$, $C(4;-3)$.

2) Даны вершины треугольника: $A(-3;-2)$, $B(1;1)$, $C(-11;6)$. Определить длины сторон *AB* и *BC*.

3) Показать, что треугольник с вершинами $A(2;-1)$, $B(4;2)$, $C(5;1)$ – равнобедренный.

4) Даны вершины треугольника: $A(-4;-2)$, $B(0;6)$, $C(10;-2)$. Найти длину медианы *AE*.

5) Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с осями координат и построить прямую.

6) Построить прямые: $y=-2x$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$; $y=2$; $x+3=0$.

7) Написать уравнение прямой, образующей с положительным направлением оси *Ox* угол $\frac{\pi}{3}$ и пересекающей ось *Oy* в точке $(0;-6)$;

8) Написать уравнение прямой, отсекающей на осях координат «отрезки», равные 3 и 4;

9) Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;2)$ и $B(2;1)$;

10) Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;5)$ и точку пересечения прямых $5x+3y-1=0$ и $4x+5y+7=0$.

11) Определить угол между прямыми $5x - y + 7 = 0$ и $3x + 2y = 0$.

12) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$ параллельно прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

13) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$ перпендикулярно прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

14) Дан треугольник ABC с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Найти:

a) уравнение и длину медианы AE;

b) уравнение и длину высоты AD;

c) тангенс внутреннего угла B.

Ответы:

2) 5 и 13;

4) $\sqrt{97}$;

5) $(6;0)$, $(0;-4)$;

7) $\sqrt{3}x - y - 6 = 0$;

8) $4x + 3y - 12 = 0$;

9) $x + 3y - 5 = 0$;

10) $8x + 3y - 7 = 0$;

11) 45°;

12) $2x + 3y - 7 = 0$;

13) $3x - 2y - 4 = 0$;

14) a) $2x - 5y + 4 = 0$; $\sqrt{29}$;

b) $x - 2y + 2 = 0$;

c) -3.