Скалярное произведение векторов, его основные свойства. Угол между векторами. Условие перпендикулярности векторов.

Краткие теоретические сведения

1. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, то есть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами, то есть $\vec{a}=\left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\vec{b}=\left(b_x;b_y;b_z\right)$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

2. Свойства скалярного произведения. Условие перпендикулярности векторов.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ — переместительный закон;

2) $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ — сочетательный закон относительно скалярного множителя;

3) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ — распределительный закон;

4) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, то есть $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$. В частности: $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$.

5) Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно нулю, то есть

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

В частности: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$.

3. Угол между векторами.

По определению скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}\cdot\sqrt{b_x^{\,2}+b_y^{\,2}+b_z^{\,2}}}.$$