Векторная алгебра

Краткие теоретические сведения

1. Векторы.

Величина, полностью определяемая лишь числовым значением, называется скалярной или скаляром. Например, площадь, длина, объем, температура, работа, масса и т. д.

Величина, определяемая не только числовым значением, но и направлением, называется векторной. Например, сила, скорость, ускорение и т. д.

Геометрическим изображением векторной величины служит направленный отрезок.

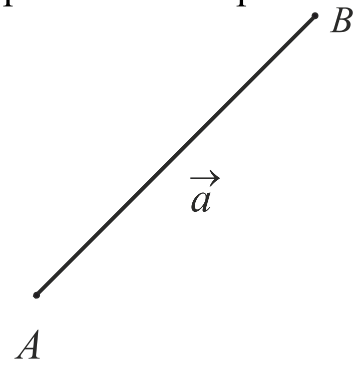

Рис. Изображение вектора $\vec{a}$

A — начало вектора, B — конец вектора.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Длиной (*нормой*, или *модулем*) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор. Модуль вектора — скалярная величина.

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$. Нулевой вектор направления не имеет. Геометрически изображается точкой.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным.*

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Это обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Если коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковое направление, то они называются *сонаправленными* и обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а если коллинеарные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ имеют противоположное направление, то они называются *противоположно направленными* и обозначаются $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{d}$.

Нулевой вектор, коллинеарен любому вектору.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковые длины. Обозначают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Два коллинеарных вектора, имеющие равные длины, но противоположно направленные, называются *противоположными.* Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$.

Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, или если хотя бы один из них является нулевым.

2. Линейные операции над векторами.

К линейным операциям над векторами относятся действия сложения, вычитания и умножения вектора на число.

1) *Сложение* и *вычитание* векторов.

Чтобы получить вектор суммы $\vec{a} + \vec{b}$, можно воспользоваться «правилом треугольника» или «правилом параллелограмма».

По «правилу треугольника»: построим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. Вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, является вектором суммы $\vec{a} + \vec{b}$.

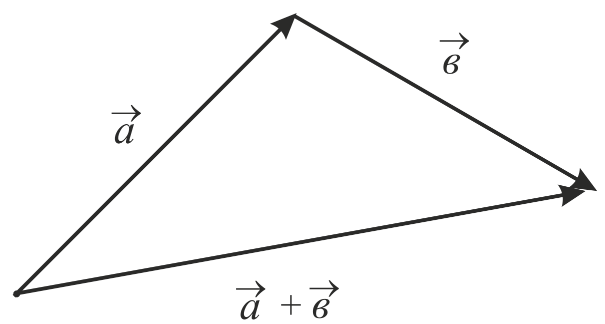

Рис. Построение вектора суммы $\vec{a} + \vec{b}$ по «правилу треугольника»

По «правилу параллелограмма»: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем от одной точки, строим на них параллелограмм. Тогда вектор, выходящий из того же начала и совпадающий по длине с диагональю параллелограмма, будет являться вектором суммы $\vec{a} + \vec{b}$.

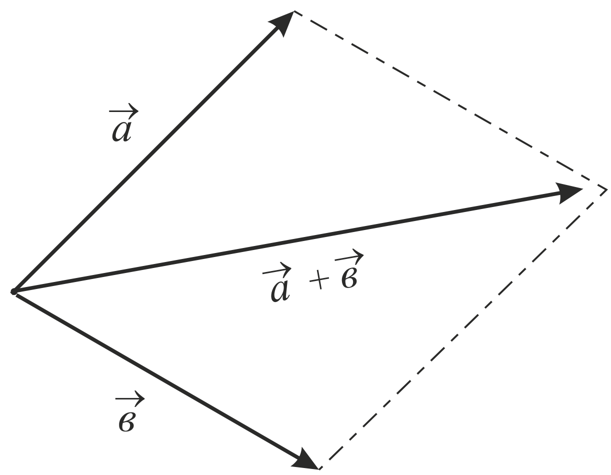

Рис. Построение вектора суммы $\vec{a}+\vec{b}$ *по «правилу параллелограмма»*

Под разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ такой, что $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Для построения вектора разности $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладываем от одной точки. Тогда вектор, выходящий из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, будет являться вектором разности $\vec{a}-\vec{b}$.

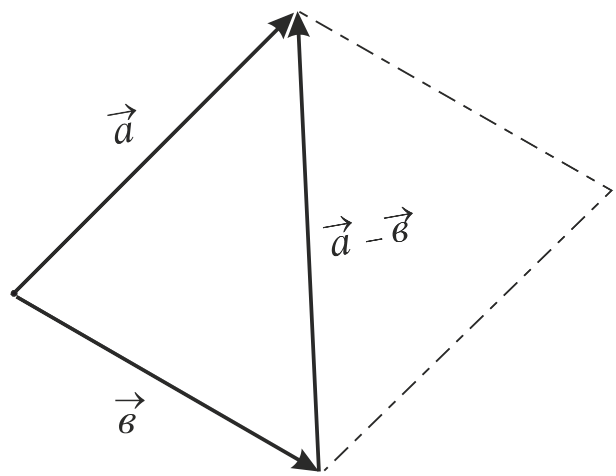

Рис. Построение вектора разности $\vec{a}-\vec{b}$

Таким образом, в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью.

2) *Умножение вектора на число.*

Произведением вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и то же направление, что и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Например, если дан вектор $\vec{a}$, то векторы $-2\vec{a}$, $\frac{1}{3}\vec{a}$ будут иметь вид:

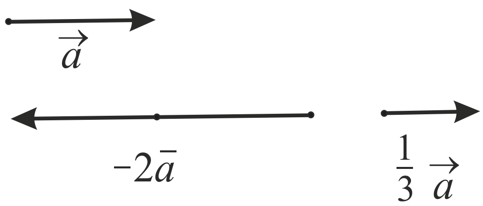

Рис. Построение векторов $-2\vec{a}$ *и* $\frac{1}{3}\vec{a}$

3. Координаты вектора.

Три взаимно перпендикулярные оси Ox, Oy и Oz с общим началом O и одинаковой единицей масштаба называется прямоугольной системой координат в пространстве.

Положение любой точки в пространстве определяется тремя координатами — абсциссой x, ординатой y и аппликатой z и обозначается так: $M(x, y, z)$.

Единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направление которых совпадает соответственно с направлением осей Ox, Oy и Oz, называются ортами координатных осей. Также орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называют координатным базисом.

Если вектор $\vec{a}$ отложить от начала координат, то координаты конца вектора будут являться координатами самого вектора $\vec{a}$. Обозначим координаты вектора так: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Вектор считается заданным, если известны его координаты.

Вектор $\vec{a}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. (2.1)

Это есть разложение вектора $\vec{a}$ по базису.

Если известны координаты начала вектора $A(x_1; y_1; z_1)$ и координаты конца вектора $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формулам:

$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. (2.2)

4. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора.

Длина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ находится по формуле

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. (2.3)

Если α, β и γ — углы вектора $\vec{a}$ с осями координат, то

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$. (2.4)

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$.

5. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.

Если даны векторы $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$,

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

6. Условие коллинеарности векторов.

Два вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, то есть $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.