Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной*, если ее определитель равен нулю.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ — невырожденная, так как ее определитель $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \neq 0$, а матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ — вырожденная, так как ее определитель $\Delta B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta A \neq 0$.

1.6.1. План нахождения обратной матрицы

1. Находим ΔA — определитель матрицы A.
2. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составляем из них матрицу A^*.
3. Транспонируем матрицу A^* и получаем союзную матрицу $\tilde{A}$.
4. Находим обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\tilde{A}. \qquad (1.1)$$

Проверить правильность нахождения обратной матрицы A^{-1} можно, исходя из определения, вычислив AA^{-1} или $A^{-1}A$. Должна получиться единичная матрица E.

Пример 1.12. Найдите матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Результат проверьте, вычислив произведение данной и полученной матриц.

Решение

1. Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0.$$

Следовательно, матрица А невырожденная, и для нее существует обратная матрица.

2. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot 1=1, \qquad A_{21}=(-1)^3\cdot 3=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot(-1)=1, \qquad A_{22}=(-1)^4\cdot 2=2.$$

Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу A^* и получаем союзную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Находим обратную матрицу по формуле (1.1) $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\widetilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5}+\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{3}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.

П р и м е р 1.13. Найдите матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Выполните проверку.

Решение

1. Найдем определитель матриц A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6\cdot 1\cdot 1 + 7\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 0\cdot 6 - 3\cdot 7\cdot 1 =$$

$= 6 + 18 - 6 - 21 = -3 \neq 0$.

Следовательно, матрица A является невырожденной, и для нее существует обратная матрица.

2. Составим матрицу A^* из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 9 & -15 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу A^*, получаем союзную матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & -15 \end{pmatrix}.$$

4. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле (1.1) $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\widetilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

Найдем произведение $A^{-1}A$:

$$A^{-1}A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -3 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$c_{11} = 1 \cdot 6 - 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 3 - 6 = -3$,
$c_{12} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 7 - 1 - 6 = 0$,
$c_{13} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 3 - 3 = 0$,
$c_{21} = -3 \cdot 6 + 0 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = -18 + 18 = 0$,
$c_{22} = -3 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = -21 + 18 = -3$,
$c_{23} = -3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 9 \cdot 1 = -9 + 9 = 0$,
$c_{31} = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 15 \cdot 2 = 24 + 6 - 30 = 0$,
$c_{32} = 4 \cdot 7 + 2 \cdot 1 - 15 \cdot 2 = 28 + 2 - 30 = 0$,
$c_{33} = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 15 \cdot 1 = 12 - 15 = -3$.

Тогда

$$A^{-1}A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Следовательно, обратная матрица A^{-1} найдена верно.
Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}.$$