ЛЕКЦИЯ №1

Элементы векторной алгебры

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Векторы. Основные понятия.
2. Линейные операции над векторами.
3. Проекция вектора на ось.
4. Координаты вектора. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора5. Действия над векторами в координатной форме.
6. Скалярное произведение векторов.
7. Векторное произведение векторов.
8. Смешанное произведение векторов.

1. Векторы. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются *скалярными*. Примерами скалярных величин являются: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называют *векторными*. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными*** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

На рисунке 1 векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

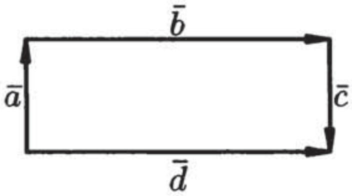


Рис. 1

Равные векторы называют также *свободными*.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$ (см. рис. 2).

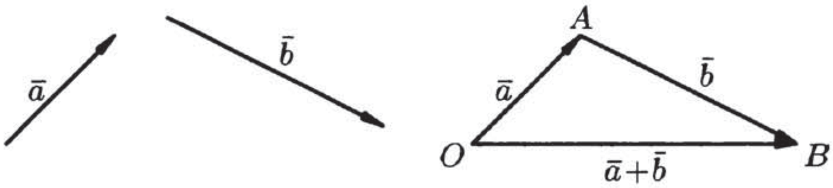


Рис. 2

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника.*

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис. 3).

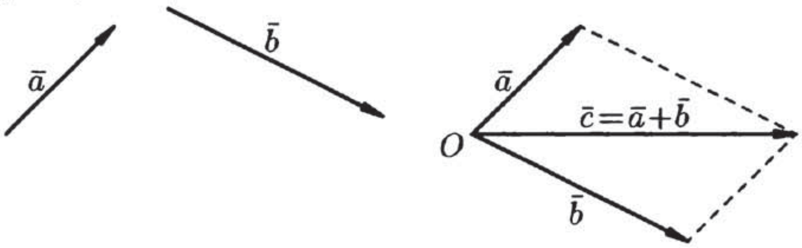


Рис. 3

На рисунке 4 показано сложение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

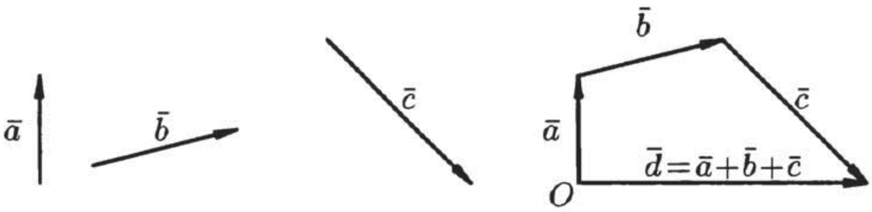


Рис. 4

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (см. рис. 5).

Рис. 5

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью (см. рис. 6).

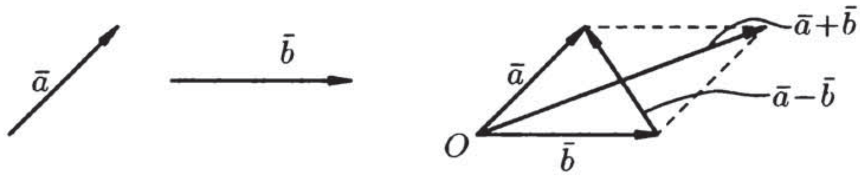


Рис. 6

Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+(-\bar{b})$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ ***на скаляр*** (***число***) λ называется вектор $\lambda\cdot\bar{a}$ (или $\bar{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$ и противоположное направление, если $\lambda<0$. Например, если дан вектор $\xrightarrow{\bar{a}}$, то векторы $3\bar{a}$ и $-2\bar{a}$ будут иметь вид $\xrightarrow{\quad 3\bar{a}\quad}$ и $\xleftarrow{\quad -2\bar{a}\quad}$.

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar{b}=\lambda\cdot\bar{a}$, то $\bar{b}\parallel\bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b}\parallel\bar{a}$, $(\bar{a}\neq\bar{0})$, то при некотором λ верно равенство $\bar{b}=\lambda\bar{a}$;

2) всегда $\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$,
2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$,
3. $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\bar{a})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\bar{a}$,
4. $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\bar{a}=\lambda_1\cdot\bar{a}+\lambda_2\cdot\bar{a}$,
5. $\lambda\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\cdot\bar{a}+\lambda\cdot\bar{b}$.

Эти свойства позволяют проводить преобразования в линейных операциях с вектором так, как это делается в обычной алгебре: слагаемые менять местами, вводить скобки, группировать, выносить за скобки как скалярные, так и векторные общие множители.

3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси (см. рис. 7).

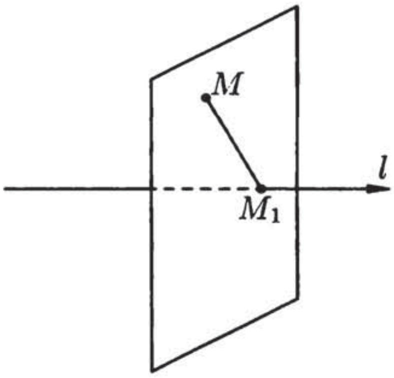


Рис. 7

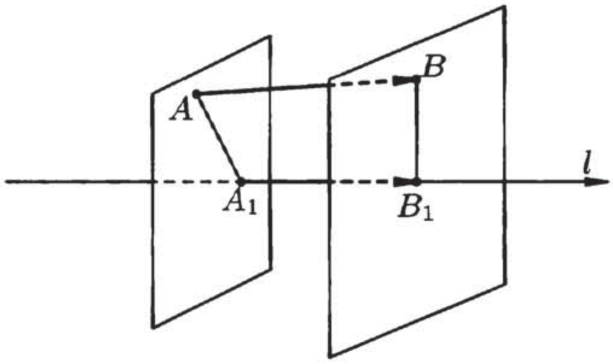


Рис. 8

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ — произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (см. рис. 8). Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $\text{пр}_l\,\overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l\,\overline{AB} = 0$.

Угол φ *между вектором* $\bar{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке 9. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

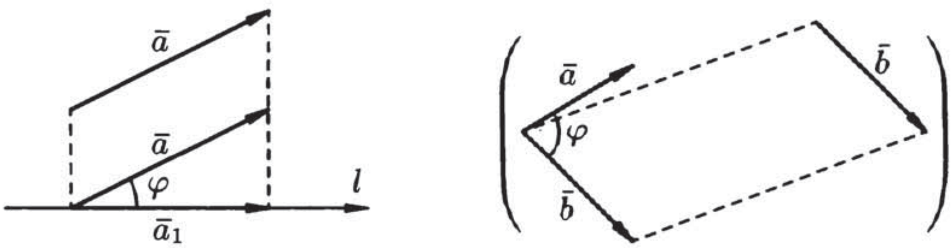


Рис. 9

4. Координаты вектора. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (см. рис. 12).

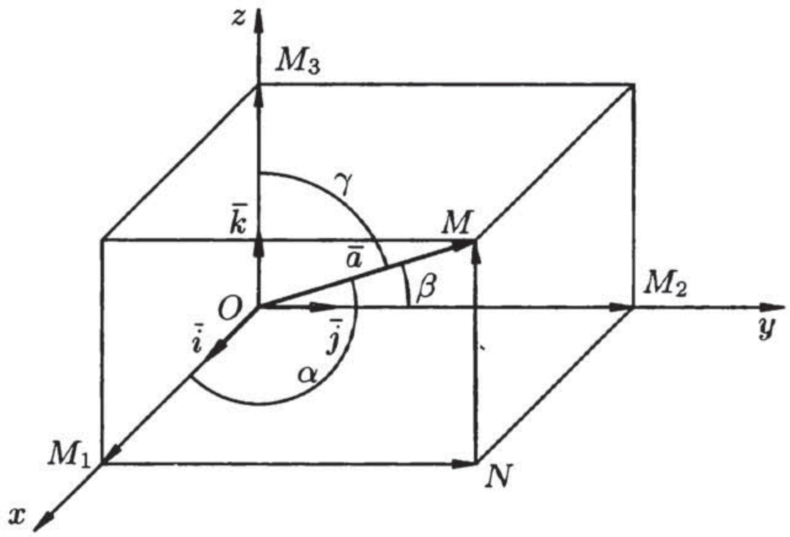


Рис. 12

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $\text{пр}_x\,\bar{a} = |\overline{OM}_1|$, $\text{пр}_y\,\bar{a} = |\overline{OM}_2|$, $\text{пр}_z\,\bar{a} = |\overline{OM}_3|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \tag{5.1}$$

Но

$$\overline{OM}_1 = |\overline{OM}_1| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM}_2 = |\overline{OM}_2| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM}_3 = |\overline{OM}_3| \cdot \bar{k}. \tag{5.2}$$

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, т. е. $|\overline{OM}_1| = a_x$, $|\overline{OM}_2| = a_y$, $|\overline{OM}_3| = a_z$. Тогда из равенств (5.1) и (5.2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \tag{5.3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.***

Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (5.3) часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; z_z)$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$, т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат***.

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{5.5}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{a}$.

Подставим выражения (5.5) в равенство (5.4), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,}$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице***.

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Итак, задав координаты вектора, всегда можно определить его модуль и направление, т. е. сам вектор.

5. Действия над векторами в координатной форме

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz или, что то же самое

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$. То есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).*

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. То есть *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.*

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, т. е.

$$\boxed{\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}}$$

Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можно записать $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, где λ — некоторое число. То есть

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}.$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, *проекции коллинеарных векторов пропорциональны.* Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются *координатами точки* M. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M, обозначается $\bar{r}$, т. е. $\overline{OM} = \bar{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\bar{r} = (x; y; z) \quad \text{или} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Координаты точки M записываются в виде $M(x; y; z)$.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем (см. рис. 13):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) - (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:* $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

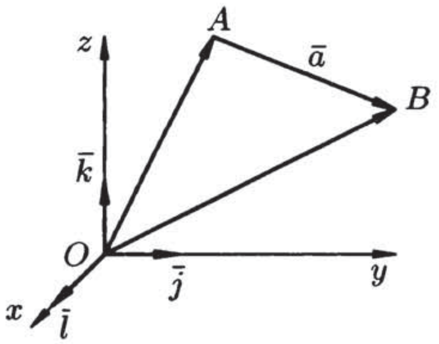


Рис. 13

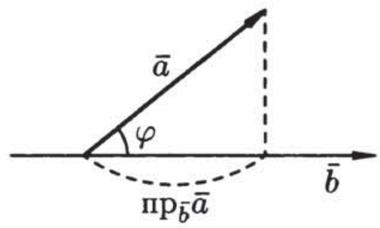


Рис. 14

6. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (или $(\bar{a}, \bar{b})$). Итак, по определению,

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,} \qquad (6.1)$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

❏ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, а $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$. И так как $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

❏ $(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \lambda\bar{a} = \lambda \cdot |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$. ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

❏ $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot (\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c}) = |\bar{a}|\, \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c} =$
$= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

❏ $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$. ■

В частности: $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т. е. $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример 6.1. Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

◔ Решение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(3\bar{a} - 4\bar{b})^2} = \sqrt{9\bar{a}^2 - 24\bar{a}\bar{b} + 16\bar{b}^2} =$$
$$= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \quad ●$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar{a}\bar{b} = 0$ и $\bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

❏ Так как $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 0 = 0$. Если же $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ и $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Отсюда $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$, т. е. $\bar{a} \perp \bar{b}$. В частности:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \quad ■$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \\ = a_xb_x\bar{i}\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} + \\ + a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\bar{j} + a_yb_z\bar{j}\bar{k} + \\ + a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} = \\ = a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z,\end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

Пример 6.2. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$, взаимно перпендикулярны.

Решение: Составим вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем: $\overline{AC} = (6;9;-3)$ и $\overline{BD} = (6;-4;0)$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. ●

Некоторые приложения скалярного произведения

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Работа постоянной силы

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\bar{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB} = \bar{S}$ (см. рис. 15).

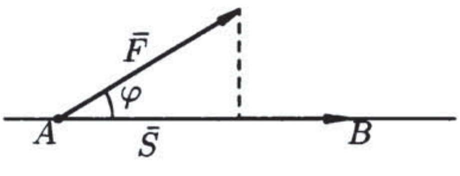


Рис. 15

Из физики известно, что работа силы $\bar{F}$ при перемещении $\bar{S}$ равна

$$A = F\cdot S\cdot\cos\varphi \quad \text{т. е.} \quad A = \bar{F}\cdot\bar{S}.$$

Таким образом, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 6.3. Вычислить работу, произведенную силой $\bar{F}=(3;2;4)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2;4;6)$ в положение $B(4;2;7)$. Под каким углом к AB направлена сила $\bar{F}$?

◔ Решение: Находим $\bar{S} = \overline{AB} = (2,-2,1)$. Стало быть,

$$A = \bar{F}\cdot\bar{S} = 3\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 4\cdot 1 = 6 \text{ (ед. работы)}.$$

Угол φ между $\bar{F}$ и $\bar{S}$ находим по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\bar{F}\cdot\bar{S}}{|\bar{F}|\cdot|\bar{S}|}$, т. е.

$$\cos\varphi = \frac{6}{\sqrt{9+4+16}\cdot\sqrt{4+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{29}\cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}, \quad \varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{29}}.$$

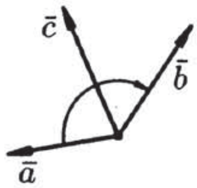
●

7. Векторное произведение векторов

Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (см. рис. 16)

правая тройка,



левая тройка

Рис. 16

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

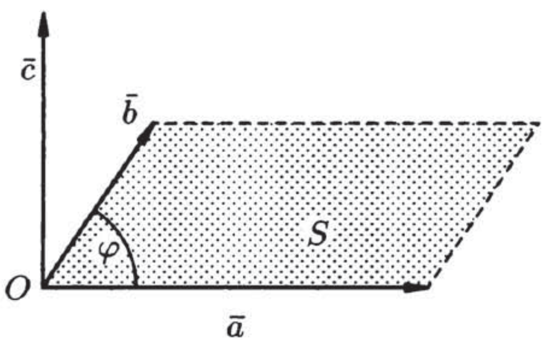


Рис. 17

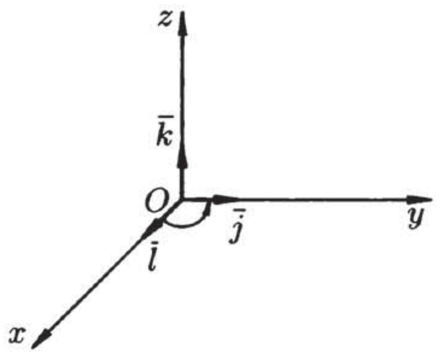


Рис. 18

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (см. рис. 18):

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Докажем, например, что $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$.

□ 1) $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;

2) $|\bar{k}| = 1$, но $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$;

3) векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ образуют правую тройку (см. рис. 16). ■

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (см. рис. 19).

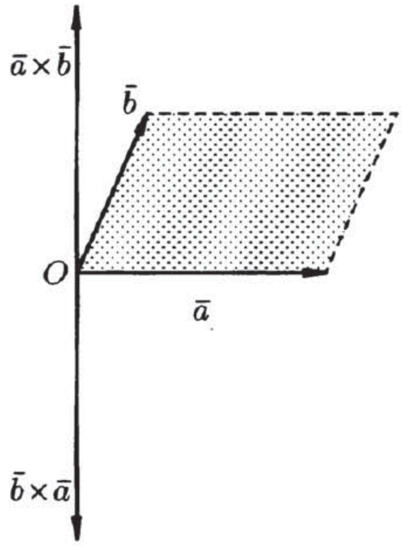


Рис. 19

□ Векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{b} \times \bar{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b} \times \bar{a}$ противоположной ориентации). Стало быть, $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$. ■

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.

□ Пусть $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектор $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ также перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (векторы $\bar{a}$, $\lambda\bar{a}$ лежат в одной плоскости). Значит, векторы $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ и $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda(\bar{a} \times \bar{b})| = \lambda|\bar{a} \times \bar{b}| = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и

$$|(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}| = |\lambda\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}).$$

Поэтому $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b}$. Аналогично доказывается при $\lambda < 0$. ■

3. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

□ Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то угол между ними равен 0° или 180°. Но тогда $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Значит, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Если же $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi = 0$. Но тогда $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ■

В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

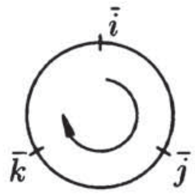
Примем без доказательства.

Выражение векторного произведения через координаты

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x(\bar{i} \times \bar{i}) + a_xb_y(\bar{i} \times \bar{j}) + a_xb_z(\bar{i} \times \bar{k}) + a_yb_x(\bar{j} \times \bar{i}) + a_yb_y(\bar{j} \times \bar{j}) +$$
$$+ a_yb_z(\bar{j} \times \bar{k}) + a_zb_x(\bar{k} \times \bar{i}) + a_zb_y(\bar{k} \times \bar{j}) + a_zb_z(\bar{k} \times \bar{k}) =$$

$$= \bar{0} + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{j} - a_yb_x\bar{k} + \bar{0} + a_yb_z\bar{i} + a_zb_x\bar{j} - a_zb_y\bar{i} + \bar{0} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k},$$

т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \tag{7.1}$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},} \tag{7.2}$$

так как правая часть равенства (7.1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (7.2) легко запоминается.

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. И, значит, $S_\triangle = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

Определение момента силы относительно точки

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и пусть O — некоторая точка пространства (см. рис. 20).

Из физики известно, что *моментом силы* $\bar{F}$ относительно точки O называется вектор $\overline{M}$, который проходит через точку O и:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\overline{M}| = |\bar{F}| \cdot ON = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\varphi = |\bar{F}| \cdot |\overline{OA}| \sin(\widehat{\bar{F}, \overline{OA}});$$

3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$.

Стало быть, $\overline{M} = \overline{OA} \times \bar{F}$.

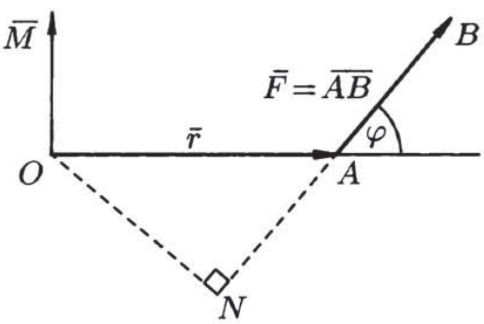


Рис. 20

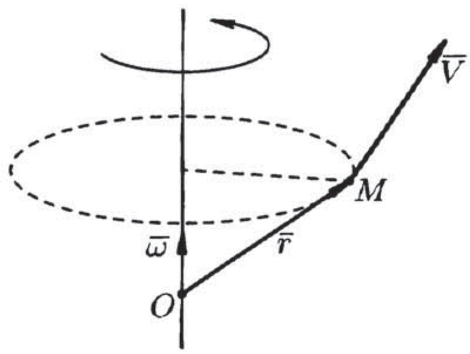


Рис. 21

Нахождение линейной скорости вращения

Скорость $\bar{v}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, где $\bar{r} = \overline{OM}$, где O — некоторая неподвижная точка оси (см. рис. 21).

8. Смешанное произведение векторов

Определение смешанного произведения, его геометрический смысл

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (см. рис. 22).

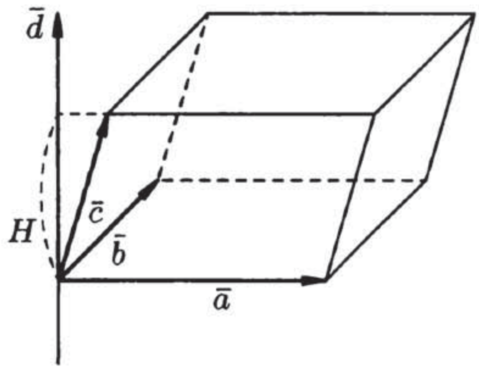


Рис. 22

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c}$, $|\bar{d}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = S \cdot (\pm H)$, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Действительно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = \pm V$. Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ — одной ориентации.

Следовательно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

❏ Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm V$, то получили бы, что $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$. Это противоречит условию: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Обратно, пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны. Тогда вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, и, следовательно, $\bar{d} \perp \bar{c}$. Поэтому $\bar{d} \cdot \bar{c} = 0$, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. ■

Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$. Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \quad (8.1)$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (8.1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

Итак, смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

Некоторые приложения смешанного произведения

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая тройка; если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 8.1. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-1;-3;-2), \quad \bar{b} = \overline{AC} = (1;3;-1), \quad \bar{c} = \overline{AD} = (2;-2;-5).$$

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$. ●