Лекция №4
Двойные и криволинейные интегралы

1. Определение двойного интеграла, его геометрический смысл и основные свойства

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в области D плоскости xOy.

Разобьем произвольно область D на n элементарных областей D_i. Обозначим ΔS_i — площадь i-ой элементарной области, d_i — диаметр i-ой элементарной области, то есть наибольшее расстояние между точками i-ой элементарной области.

В каждой элементарной области D_i выберем произвольно точку $M_i(x_i; y_i)$.

Найдем значения функции в этих точках, т.е. $f(x_i; y_i)$.

Составим сумму

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i,$$

которая называется ***интегральной суммой*** функции $z = f(x; y)$ в области D.

Найдем предел этой интегральной суммы при стремлении наибольшего диаметра дробления D_i к нулю, т.е.

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i.$$

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения области D на части и от выбора точек M_i, то он и называется ***двойным интегралом*** от функции $z = f(x; y)$ по области D.

Двойной интеграл обозначается

$$\iint_D f(x; y)dxdy.$$

Таким образом,

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i,$$

где $f(x; y)$ — подынтегральная функция,
D — область интегрирования.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции):
Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема в этой области.

Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим ***цилиндрическое тело***, то есть тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x; y) \geq 0$, снизу — замкнутой областью D плоскости xOy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей является граница области D.

D — проекция поверхности $z = f(x; y)$ на плоскость xOy.

Величина двойного интеграла $\iint\limits_D f(x; y)dxdy$ равна объему этого цилиндрического тела.

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = V .$$

Основные свойства двойного интеграла.

Для интегрируемых в области D функций выполняются следующие свойства:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, то есть

$$\iint\limits_D Cf(x; y)dxdy = C\iint\limits_D f(x; y)dxdy \text{, где } C = \text{const} .$$

2. Двойной интеграл от суммы нескольких функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций, то есть

$$\iint\limits_D (f(x; y) + g(x; y))dxdy = \iint\limits_D f(x; y)dxdy + \iint\limits_D g(x; y)dxdy .$$

3. Если область D разбита на две непересекающиеся части D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x; y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x; y)dxdy .$$

4. Если $f(x; y) \geq 0$, $(x; y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x; y)dxdy \geq 0$.

5. Если $f(x; y) \geq g(x; y)$, $(x; y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x; y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x; y)dxdy$.

6. $\iint\limits_D dxdy = S$, где S — площадь области D.

7. $mS \leq \iint\limits_D f(x; y)dxdy \leq MS$,

где S — площадь области D,
m — наименьшее значение функции $z = f(x; y)$ в области D,
M — наибольшее значение функции $z = f(x; y)$ в области D.

8. Если функция $z = f(x; y)$ непрерывна в области D, то в области D найдется такая точка $M(x_0; y_0)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = f(x_0; y_0)S .$$

Число $f(x_0; y_0)$ называется *средним значением функции* $z = f(x; y)$ в области D.

2. Вычисление двойных интегралов

Основной способ вычисления двойного интеграла состоит в сведении его к повторному интегралу, то есть в последовательном интегрировании по каждой из переменных в отдельности.

Область называется *правильной в направлении оси Oy* (*Ox*), если любая прямая, параллельная оси *Oy* (*Ox*), пересекает границу области не более чем в двух точках.

1) Пусть область *D* — правильная в направлении оси *Oy*, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$ на $[a,b]$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x;y)dy.$$

Вначале вычисляется внутренний интеграл по переменной *y*, считая $x=\text{const}$, а потом — внешний интеграл по переменной *x*.

Пример.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2ydxdy$, где область *D* ограничена линиями $x=1$, $x=2$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x$.

Решение.

Изобразим область *D (постройте самостоятельно)*.

Сведем двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_D x^2ydxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} x^2ydy.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} x^2ydy=x^2\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} ydy=\left.\frac{x^2y^2}{2}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}=\frac{x^4}{2}-\frac{1}{2}.$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int\limits_1^2\left(\frac{x^4}{2}-\frac{1}{2}\right)dx=\left.\left(\frac{x^5}{10}-\frac{1}{2}x\right)\right|_1^2=3{,}2-1-0{,}1+0{,}5=2{,}6.$$

2) Пусть область *D* — правильная в направлении оси *Ox*, ограниченная линиями $y=c$, $y=d$, $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, $g_1(y)\le g_2(y)$ на $[c,d]$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x;y)dx.$$

Вначале вычисляется внутренний интеграл по переменной *y*, считая $x=\text{const}$, а потом — внешний интеграл по переменной *x*.

Пример.

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$, $y=2-x$.

Решение.

Изобразим область *D (постройте самостоятельно)*.

Сведем двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+y)dx .$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+y)dx = \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} xdx + \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} ydx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{\sqrt{y}}^{2-y} + \left.yx\right|_{\sqrt{y}}^{2-y} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4-4y+y^2\right) - \frac{y}{2} + 2y - y^2 - y^{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} - y^{\frac{3}{2}} .$$

Вычислим внешний интеграл:

$$\int\limits_0^1 \left(2 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2} - y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \left.\left(2y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\right|_0^1 = .$$

$$= 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{2}{5} = \frac{120-15-10-24}{60} = \frac{71}{60} .$$

Пример.

Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-x^2} f(x;y)dx$.

Решение.

Изобразим область интегрирования *D (постройте самостоятельно)*.

Для изменения порядка интегрирования разобьем прямой $x=3$ область на две области D_1 и D_2, которые определяются соответственно системами неравенств $\begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ 0 \le y \le \dfrac{x-1}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le \sqrt{4-x}. \end{cases}$

Тогда

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-x^2} f(x;y)dx = \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{x-1}{2}} f(x;y)dy + \int\limits_3^4 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x}} f(x;y)dy .$$

3. Геометрические приложения двойных интегралов

1) Вычисление объемов тел с помощью двойного интеграла

Объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y) \geq 0$, снизу — замкнутой областью D плоскости xOy, с боков — цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей является граница области D, равен

$$V = \iint_D f(x; y)dxdy .$$

Пример.

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $y = x^2$, $y + z = 2$.

Решение.

Лекционное упражнение: Постройте тело и его проекцию на плоскость xOy.

$$V = \iint_D (2 - y)dxdy = 2\iint_{D_1} (2 - y)dxdy = 2\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{y}} (2 - y)dx .$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{y}} (2 - y)dx = (2 - y)x\Big|_0^{\sqrt{y}} = (2 - y)\sqrt{y} = 2y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} .$$

Вычислим внешний интеграл:

$$2\int_0^2 \left(2y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right)dy = 2\left(\frac{4y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{4\sqrt{8}}{3} - \frac{2\sqrt{32}}{5} \right) = 2\left(\frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{8\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{32\sqrt{2}}{15} \text{ куб. ед.}$$

2) Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойного интеграла

Площадь S области D равна

$$S = \iint_D dxdy .$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 1$ и прямой $y = x - 1$.

Решение.

Лекционное упражнение: Изобразите фигуру.

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dx \int_{x^2 - 2x - 1}^{x - 1} dy = \int_0^3 y\Big|_{x^2 - 2x - 1}^{x - 1} dx =$$

$$=\int_0^3 \left(x-1-x^2+2x+1\right)dx=\int_0^3 \left(3x-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3=$$

$$=13{,}5-9=4{,}5 \text{ кв. ед.}$$

4. Определение криволинейного интеграла по координатам, его основные свойства

Пусть на плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB уравнением $y=f(x)$, а также функции $z=P(x;y)$ и $z=Q(x;y)$, которые определены и непрерывны в каждой точке прямой AB.

Точками $M_0=A$, M_1, M_2, … , $M_n=B$ разобьем произвольно кривую AB на n частей (элементарных дуг).

Обозначим через $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ проекцию элементарной дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Ox, а через $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$ проекцию элементарной дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Oy, где $i=0;1;...;n-1$.

В каждой элементарной дуге $M_{i-1}M_i$ выберем произвольно точку $K_i(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$.

Найдем значения функций $P(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$ и $Q(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$ в точках $K_i(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$.

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta x_i+Q(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta y_i,$$

которая является интегральной суммой.

Найдем предел

$$\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta x_i+Q(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta y_i.$$

Если этот предел существует независимо от деления дуги AB на n элементарных дуг и от выбора в них точек K_i, то он и называется криволинейным интегралом по координатам (или второго рода) по дуге кривой AB.

$$\boxed{\int_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta x_i+Q(\overline{x}_i;\overline{y}_i)\Delta y_i}.$$

Основные свойства криволинейного интеграла по координатам:

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл 2 рода меняет знак, то есть

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=-\int_{BA} Pdx+Qdy.$$

2. Если кривая AB разбита точкой C на 2 части, то

$$\int_{AB} Pdx+Qdy=\int_{AC} Pdx+Qdy+\int_{CB} Pdx+Qdy.$$

3. Криволинейный интеграл 2 рода по замкнутой кривой не зависит от начальной точки, то есть

$$\oint_{AmCnA} Pdx + Qdy = \oint_{CnAmC} Pdx + Qdy.$$

5. Вычисление криволинейных интегралов по координатам

Если кривая *AB* задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$, то

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} P(x; f(x))dx + Q(x; f(x))f'(x)dx.$$

Если кривая *AB* задана уравнением $x = g(y)$, где $y \in [c; d]$, то

$$\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{AB} P(g(y); y)g'dy + Q(g(y); y)dy.$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_L 4xdx + 2ydy$, где L — дуга параболы $y = x^3$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

Решение.

$$\int_L 4xdx + 2ydy = \int_1^2 4xdx + 2x^3 3x^2 dx = \int_1^2 (4x + 6x^5)dx = (2x^2 + x^6)\Big|_1^2 = 69.$$

Пример: Вычислить интеграл $\int_{OAB} (x + y)dx - xdy$ по ломаной *OAB*, если $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;2)$.

Решение.

Лекционное упражнение: Изобразте ломаную *OAB* в системе координат.

Тогда

$$\int_{OAB} (x + y)dx - xdy = \int_{OA} (x + y)dx - xdy + \int_{AB} (x + y)dx - xdy.$$

Так как на отрезке *OA* $y = 0$, $0 \le x \le 2$, $dy = 0$ то

$$\int_{OA} (x + y)dx - xdy = \int_0^2 xdx = 2.$$

Составим уравнение прямой *AB*:

$$\frac{y - 0}{2 - 0} = \frac{x - 2}{4 - 2};$$

$$y = x - 2;$$

$$dy = dx;$$

$$2 \le x \le 4.$$

Тогда

$$\int_{AB} (x + y)dx - xdy = \int_2^4 (x + x - 2)dx - xdx = \int_2^4 (x - 2)dx = 2.$$

Следовательно,

$$\int_{OAB}(x+y)dx - xdy = 2+2=4.$$

6. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина

Пусть L — замкнутый контур, ограничивающий на плоскости Oxy область D.

Теорема:

Если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D, то справедлива ***формула Грина***:

$$\boxed{\oint_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy}.$$

Здесь контур L обходится против часовой стрелки.

Пример:

С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L x^2 ydx + xydy,$$

где контур L — прямоугольник $ABCD$ с координатами вершин $A(1;1)$, $B(3;1)$, $C(3;2)$, $B(1;2)$, который обходится против часовой стрелки.

Решение.

Лекционное упражнение: Постройте контур L в системе координат.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(x^2 y\right)_y' = x^2; \ \frac{\partial Q}{dx} = (xy)_x' = y.$$

Тогда

$$\oint_L x^2 ydx + xydy = \iint_D \left(y - x^2\right)dxdy =$$

$$= \int_1^3 dx \int_1^2 \left(y - x^2\right)dy = \int_1^3 \left(\frac{y^2}{2} - x^2 y\right)\Bigg|_1^2 dx = \int_1^3 \left(2 - 2x^2 - \frac{1}{2} + x^2\right)dx =$$

$$\int_1^3 \left(\frac{3}{2} - x^2\right)dx = \left(\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{9}{2} - 9 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = -5\frac{2}{3}.$$

7. Условия независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования

Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в области D.

Теорема:

Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}.$$

Следствие:

Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{L} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$.

Пример:

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{L} 6x^2y^2dx + 4x^3ydy$, где L — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение.

Применим формулу Грина.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(6x^2y^2\right)_y' = 12x^2;\ \frac{\partial Q}{dx} = \left(4x^3y\right)_x' = 12x^2.$$

Тогда

$$\oint\limits_{L} 6x^2y^2dx + 4x^3ydy = 0.$$