Лекция
Элементы теории функций комплексной переменной

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
4. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
5. Возведение в степень n $(n \in N)$ и извлечение корня степени n из комплексного числа.
6. Понятие функции комплексного переменного и ее дифференцируемость.

Комплексные числа – расширение множества действительных чисел, широко применяющееся в естественных и прикладных дисциплинах. Использование комплексных чисел позволяет наиболее естественным образом описать многие процессы, в частности, колебательные. Изучение функций комплексного переменного привело к углублению и расширению знаний о функциях действительных переменных и породило множество мощных вычислительных методов.

1. Алгебраическая форма комплексного числа (к.ч.).

Комплексным числом (к. ч.) называется выражение вида $z = x + iy$, где i — мнимая единица, x и y — действительные числа.

$$i^2 = -1.$$

Число x называется *действительной частью* к. ч. и обозначается

$$x = \operatorname{Re} z$$

(от франц. *reele* — действительный).

Число y называется *мнимой частью* к. ч. и обозначается

$$y = \operatorname{Im} z.$$

(от франц. *imaginaire* — мнимый).

$z = x + iy$ — *алгебраическая форма* к. ч.

При $y = 0$ имеем частный случай $z = x$ — действительное число.

При $x = 0$, $y \neq 0$ имеем $z = iy$ — *чисто мнимое* число.

Множество всех комплексных чисел обозначается *C*.

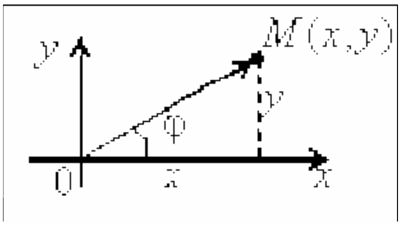
Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *комплексно-сопряженными*.

Два к. ч. $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, т. е. $z_1 = z_2$, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

В частности $z = 0$, если $x = y = 0$.

К. ч. $z = x + iy$ изображается точкой $M(x, y)$ плоскости *Oxy* или радиус-вектором $\overline{OM}$ точки *M*.

Плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью*, Ox — *действительной осью*, Oy — *мнимой осью*.



2. Действия над к.ч. в алгебраической форме.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом:

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,
3) $z_1 z_2$ — по правилу умножения многочленов, учитывая $i^2 = -1$, т. е.

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$, $z_2 \overline{z_2} = x_2{}^2 + y_2{}^2$.

Пример 1:

Даны к. ч. $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$;

$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i$;

$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{36 + 15i + 48i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{16 + 63i}{25} = \frac{16}{25} + \frac{63}{25}i.$$

3. Тригонометрическая и показательная формы к. ч.

Изобразим к. ч. $z = x + iy$ радиус-вектором $\overline{OM}$ точки $M(x, y)$ комплексной плоскости Oxy (см. рис. 1).

Длина вектора $\overline{OM}$ называется модулем к. ч. z и обозначается r или $|z|$.

$$r = |z| = \left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ, образованный радиус-вектором $\overline{OM}$ с осью Ox, называется *аргументом к. ч. z* и обозначается *Argz.*

$$Argz = \angle(Ox, \overline{OM}).$$

Из значений $\varphi = Argz$ выделяется *главное* значение аргумента $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$.

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & I, IV \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & II \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & III \end{cases}$$

Для $z = 0$ аргумент не определен.

Очевидно, что:

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi.$$

Следовательно, к. ч. $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи к. ч. называется *тригонометрической формой к. ч.*

Пример 2: Найти модуль комплексного числа *z*, если $\operatorname{Im} z = 10$, $\arg z = \arcsin\dfrac{5}{6}$.

Решение.

По условию $\varphi = \arg z = \arcsin\dfrac{5}{6}$, $y = \operatorname{Im} z = 10$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{5}{6}$.

Так как $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, то $\dfrac{5}{6} = \dfrac{10}{r}$. Откуда $r = 12$.

Пример 3: Записать число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение.

Найдем модуль комплексного числа *z*:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Так как точка $M(1;1)$, изображающая к. ч. *z*, принадлежит II четверти, то аргумент (его главное значение) найдем по формуле

$$\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi.$$

Получим

$$\varphi = arctg\frac{1}{-1} + \pi = -arctg1 + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Тогда тригонометрическая форма к. ч. $z = -1 + i$ имеет вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Связь между тригонометрическими и показательными функциями выражается *формулами Эйлера:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Отсюда следует *показательная форма комплексного числа*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 4: Записать число $z = -1 + i$ в показательной форме.

Решение.

Выше для комплексного числа $z = -1 + i$ было получены модуль $r = \sqrt{2}$ и аргумент $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Тогда его можно записать в показательной форме:

$$z = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

4. Умножение и деление в тригонометрической и показательной формах

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$.

Арифметические операции умножения и деления к. ч. в тригонометрической форме определяются следующим образом:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пример 5: Даны к. ч. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Найти z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$$z_1z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

5. Возведение в степень n $(n \in N)$ *и извлечение корня степени n из к.ч.*

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Так как при умножении к. ч. их модули перемножаются, а аргументы складываются, то легко получить формулу возведения к. ч. в натуральную степень n, известную как *формула Муавра*:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Если $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = r^n e^{in\varphi}$.

Пример 6: Найти $(-1+i)^{20}$.

Решение.

Выше была получена тригонометрическая форма к. ч. $z = -1+i$:

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

По формуле Муавра находим

$$(-1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{20} =$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos 20\cdot\frac{3\pi}{4} + i\sin 20\cdot\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$1024(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = 1024(-1+0i) = -1024.$$

Корень n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, не равного нулю, имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Пример 7: Найти $\sqrt{i}$.

Решение.

Запишем комплексное число $z = i$ в тригонометрической форме:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $\sqrt{i} = \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}$, где $k = 0, 1$.

Получаем два значения корня:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Пример 8: Найти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение.

Выше была получена тригонометрическая форма к. ч. $z=-1+i$:

$$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Тогда

$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),\ \text{где } k=0,1,2.$$

Получаем три значения корня:

$$z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

6. Понятие функции комплексного переменного и ее дифференцируемость.

Пусть даны две комплексные плоскости.

Если каждому комплексному числу $z=x+iy$ из множества D одной комплексной плоскости ставится в соответствие единственное число $w=u+iv$ из множества G другой комплексной плоскости, то задана функция $w=f(z)$ комплексного переменного.

Множество D — область определения, G — множество значений функции *f*.

Например:

$w=z^2$, где $z\in C$ — функция комплексного переменного.

Так как $z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, то $w=u+iv$, где $u=x^2-y^2$, $v=2xy$.

$u=u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$ — действительная часть функции $w=f(z)$,

$v=v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$ — мнимая часть функции $w=f(z)$.

Тогда

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Для того, чтобы однозначная функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно выполнения *условий Коши-Римона:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда производная функции $w = f(z)$ находится следующим образом:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Основные элементарные ФКП дифференцируются по тем же формулам, что и основные элементарные функции действительного переменного.

Пример 9: Найдите значение функции комплексного переменного $f(z) = 4z + 1$ в точке $z_0 = 1 + 2i$.

Решение.

$f(1 + 2i) = 4(1 + 2i) + 1 = 4 + 8i + 1 = 5 + 8i$.

Пример 10: Найти значение производной функции $f(z) = 4z^2 - 3i$ в точке $z_0 = 2 + 5i$.

Решение.

$$f'(z) = 8z,$$
$$f'(2 + 5i) = 8(2 + 5i) = 16 + 10i.$$