Примеры вычисления двойных интегралов в декартовой системе координат

Вычисление кратных интегралов по правильной области D сводится к вычислению повторных интегралов.

Введем понятие правильной области.

Def 11. Замкнутая область D плоскости Oxy называется *правильной* в направлении оси Ox (оси Oy), если любая прямая, параллельная оси Ox (Oy) и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках, (рис. 8).

На рис. 8 область D_1 правильная в направлении оси Ox, а D_2 в направлении Oy.

Def 12. Область, правильная в направлении обеих осей, называется *правильной.*

Практически любую неправильную область можно представить в виде объединения правильных областей (рис. 9), и, согласно свойству 3 двойных интегралов, методы вычисления интегралов по правильным областям пригодны для их вычисления по любым областям.

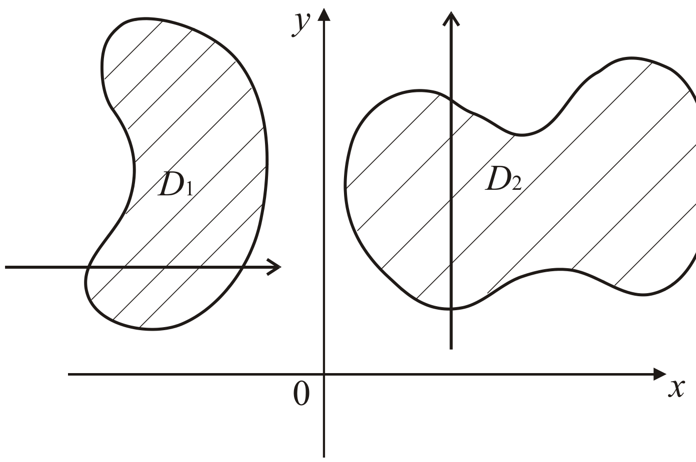

Рис. 8

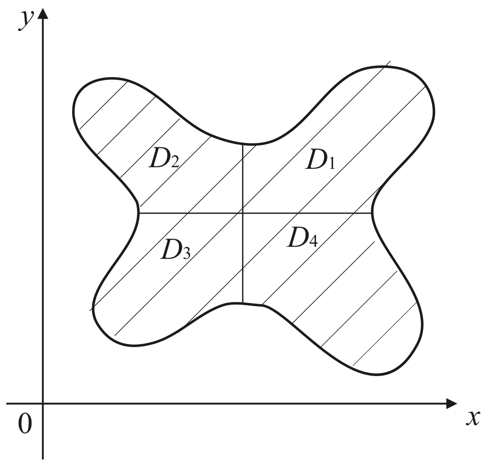

Рис. 9

Def 13. Область $D=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные на отрезке $[a;\ b]$ функции, называется y-трапециевидной (рис. 10).

y-трапециевидные области являются правильными в направлении оси Oy. Дадим определение повторного интеграла по y-трапециевидной области.

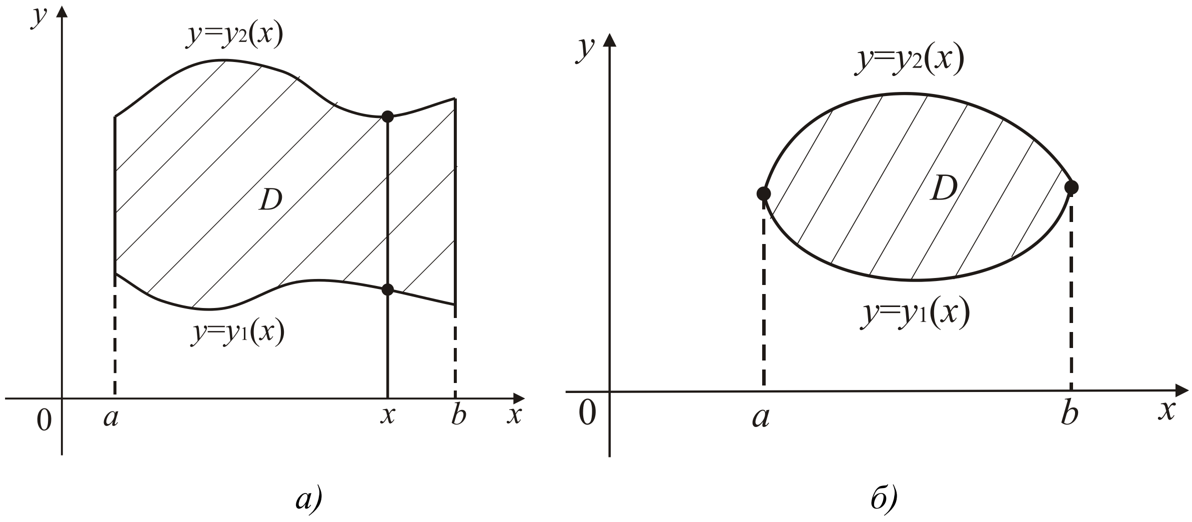

Рис. 10

Def 14. Если функция $f(x, y)$ определена в y-трапециевидной области $D=\{(x,y): a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ и для любого фиксированного x, принадлежащего отрезку $[a; b]$, функция $f(x, y)$, как функция переменной y, интегрируема на отрезке $[y_1(x), y_2(x)]$, т.е. для $\forall x\in[a, b]$ существует

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = F(x),$$

и $F(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

называется *повторным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Таким образом, имеем:

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b\left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx. \qquad (16)$$

Интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ называется *внутренним*, его вычисляют по переменной y, x считается константой. Внешнее интегрирование ведется по переменной x.

Пример 1

Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}$.

Решение

Используем формулу (16)

$$\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}=\int\limits_1^2\left[\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}\right]dx=\int\limits_1^2\left[x^2\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}y^{-2}dy\right]dx=\int\limits_1^2\left[x^2\left.\frac{-1}{y}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}\right]dx=-\int\limits_1^2\left[x^2\frac{1}{x}-x^3\right]dx=$$

$$=-\int\limits_1^2\left(x-x^3\right)dx=\left.\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\right|_1^2=-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\left(2^4-1\right)=-\frac{3}{2}+\frac{15}{4}=\frac{9}{4}=2,25$$

Def 15. Область $D=\{(x,y):c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$, где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — непрерывные на отрезке $[c;\ d]$ функции называется x-трапециевидной (рис. 11).

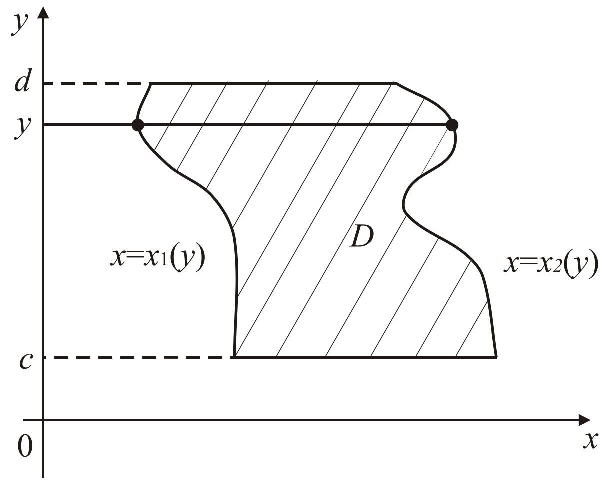

Рис. 11

Аналогично можно дать определение повторного интеграла по x-трапециевидной области:

$$\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx=\int\limits_c^d\left[\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx\right]dy. \qquad (17)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл по переменной x, считая y константой, затем внешний интеграл по переменной y как определенный интеграл.

Замечание. Следует помнить, что пределы у внешнего интеграла всегда числа, а у внутреннего интеграла — числа, если область интегрирования является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, или функции, зависящие от той переменной, по которой «берется» внешний интеграл.

Можно доказать, что двойной интеграл от непрерывной функции $f(x; y)$ по y-трапециевидной области равен повторному интегралу по этой области, т.е.

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (18)$$

Аналогично, если $f(x; y)$ непрерывна в x- трапециевидной области D, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (19)$$

Если область D можно задать как y-трапециевидную, а также и как x-трапециевидную, то из равенств (18) и (19) следует, что

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (20)$$

Переход от левой части равенства (20) к правой его части и обратно называется *изменением порядка интегрирования* в двойном интеграле.

Аддитивность двойного интеграла позволяет изменять порядок интегрирования в случаях, когда область D — произвольная.

Пример 2

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (x+2y)dxdy,$$

если область D ограничена линиями $x = 1$; $y=\sqrt{x}$; $y = -x^2$.

Решение

Построим область D (рис. 12) $D=\left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ -x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

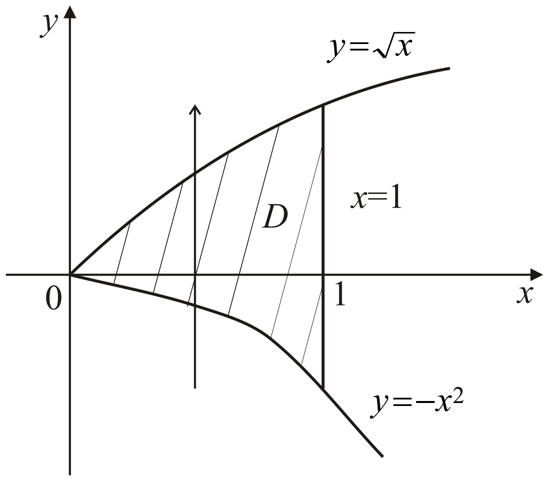

Рис. 12

Область интегрирования является y-трапециевидной:

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\,dy = \int_0^1 \left[\int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)\,dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(xy+y^2\right)\Big|_{-x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x}+x^3+x-x^4\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}}+x^3+x-x^4\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{4} = \frac{19}{20}$$

Ответ: $\frac{19}{20}$.

Пример 3

Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить интеграл наиболее рационально.

$\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dxdy$, где область D ограничена линиями $x = 0$; $y = 2$; $y = x$.

Решение

Изобразим область D на рисунке (рис. 13). Область D расположена в полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 2$ и для любого x из отрезка [0; 2] соответствующие значения переменной y изменяются от прямой $y = x$ до прямой $y = 2$, поэтому

$$\iint_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dxdy = \int_0^2 dx \int_x^2 y^2 e^{-\frac{xy}{4}} dy. \quad (21)$$

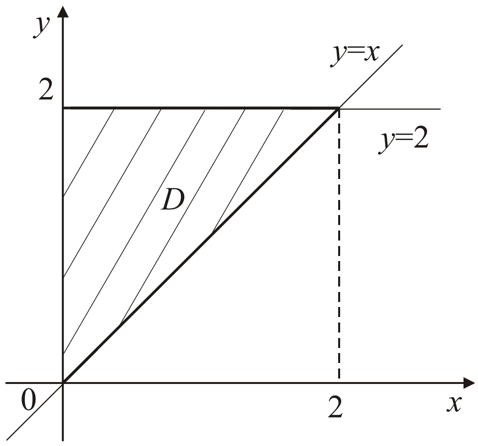

Рис. 13

Изменим порядок интегрирования, задав область D как x-трапециевидную:

$$D=\{(x,y):\ 0\le y\le 2,\ 0\le x\le y\}.$$

$$\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^y y^2 e^{-\frac{xy}{4}}dx. \tag{22}$$

В равенстве (21) для нахождения внутреннего интеграла нужно дважды использовать метод интегрирования по частям, а в равенстве (22) интеграл проще, поэтому для вычисления двойного интеграла целесообразнее использовать равенство (22):

$$\iint\limits_D y^2 e^{-\frac{xy}{4}}dxdy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^y y^2 e^{-\frac{xy}{4}}dx=\int\limits_0^2\left[y^2\int\limits_0^y e^{-\frac{xy}{4}}dx\right]dy=\int\limits_0^2\left[y^2\frac{-4}{y}\int\limits_0^y e^{-\frac{xy}{4}}d\left(-\frac{xy}{4}\right)\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[-4ye^{-\frac{xy}{4}}\Bigg|_0^y\right]dy==\int\limits_0^2\left(-4ye^{-\frac{y^2}{4}}+4y\right)dy=-4\int\limits_0^2 ye^{-\frac{y^2}{4}}dy+4\int\limits_0^2 ydy=$$

$$=8\int\limits_0^2 e^{-\frac{y^2}{4}}d\left(-\frac{y^2}{4}\right)+2y^2\Bigg|_0^2=8e^{-\frac{y^2}{4}}\Bigg|_0^2+8=8e^{-1}-8+8=\frac{8}{e}$$

Ответ: $\frac{8}{e}$.

Пример 4

Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-2}^{6}dx\int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}}f(x,y)dy.$$

Решение

Построим области интегрирования по пределам интегрирования:

$-2 \le x \le 6$, снизу область ограничена линией $y = -3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$, сверху — линией $y = -3 + \sqrt{12 + 4x - x^2}$. Преобразуем выражение $y = -3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$, выделив полный квадрат в квадратном трехчлене.

$y = -3 - \sqrt{-\left(x^2 - 4x - 12\right)}$ или $y + 3 = -\sqrt{-\left(\left(x-2\right)^2 - 16\right)}$.

Отсюда $y + 3 = -\sqrt{16 - \left(x-2\right)^2}$, причем $y + 3 \le 0$, т.е. $y \le -3$. Возведем обе части последнего равенства в квадрат: $(y + 3)^2 = 16 - (x - 2)^2$.

Отсюда $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ — уравнение окружности с центром в точке (2; –3) и радиуса 4.

Так как $y \le -3$, то $y = -3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$ — уравнение полуокружности, расположенной ниже прямой $y = -3$, а $y = -3 + \sqrt{12 + 4x - x^2}$ — уравнение полуокружности, расположенной выше прямой $y = -3$.

Строим область интегрирования D. (рис. 14).

В области D переменная y изменяется от –7 до 1, причем для любого y из отрезка [–7; 1] переменная x изменяется от полуокружности, расположенной левее прямой AB ($x = 2$), до полуокружности, расположенной правее этой прямой.

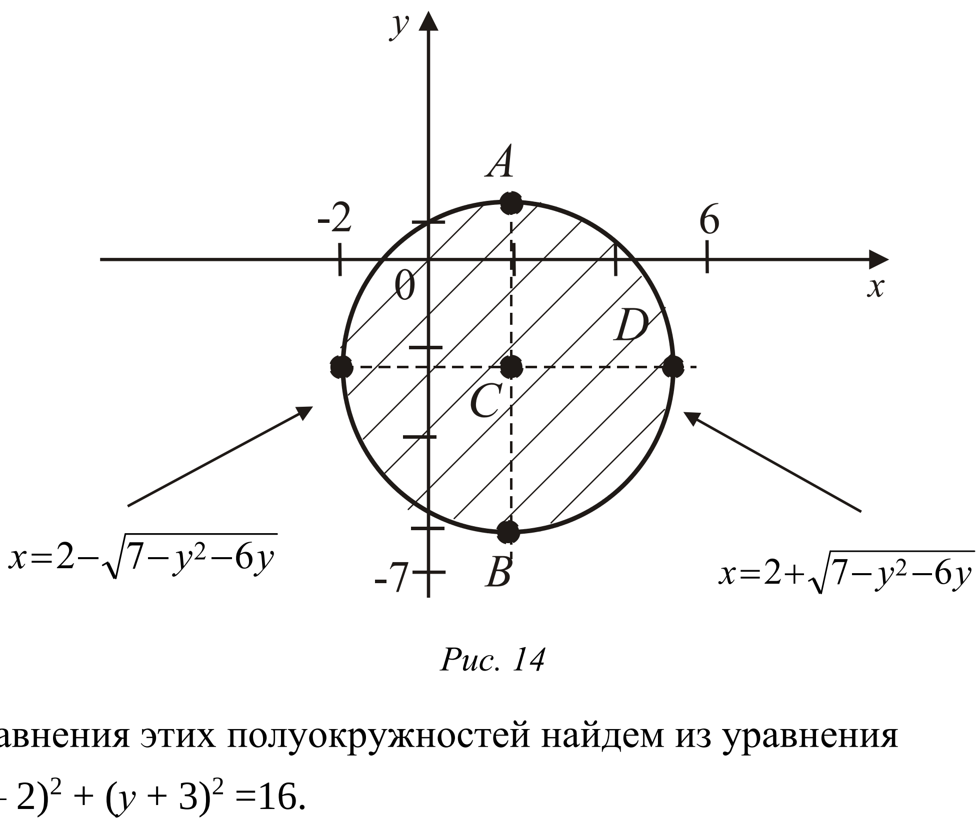

Рис. 14

Уравнения этих полуокружностей найдем из уравнения

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

$(x-2)^2 = 16-(y+3)^2$,

$x-2=\pm\sqrt{16-y^2-6y-9}$,

$x=2\pm\sqrt{7-y^2-6y}$.

$x=2-\sqrt{7-y^2-6y}$ — уравнение левой полуокружности,

$x=2+\sqrt{7-y^2-6y}$ — уравнение правой полуокружности.

Тогда

$$\int_{-2}^{6} dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-7}^{1} dy \int_{2-\sqrt{7-y^2-6y}}^{2+\sqrt{7-y^2-6y}} f(x,y)dx.$$

Пример 5

Изменить порядок интегрирования

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy + \int_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy.$$

Решение

Строим область интегрирования D (рис. 15).

При $-2\le x\le 2$ переменная y изменяется от $y=0$ до $y=\dfrac{x+2}{2}$.

Для любого x из отрезка $\left[2;\dfrac{10}{3}\right]$ переменная y изменяется от линии $y=\sqrt{x^2-4}$ до прямой $y=\dfrac{x+2}{2}$. Так как $y=\sqrt{x^2-4}$, $y\ge 0$, значит, $y^2 = x^2-4$, отсюда $x^2-y^2=-4$ — гипербола.

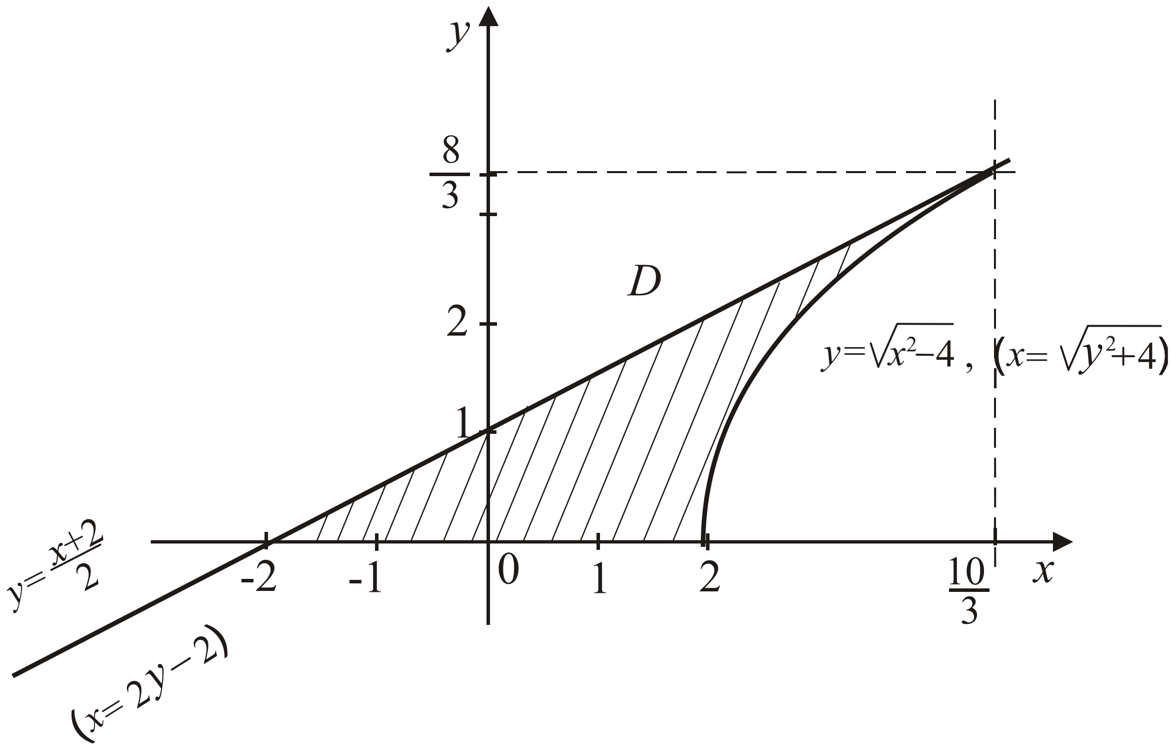

Рис. 15

Из уравнения $y = \frac{x+2}{2}$ найдем $x = 2y - 2$.

Из уравнения $y = \sqrt{x^2 - 4}$ выразим x, $(x \geq 2)$. $y^2 = x^2 - 4$, отсюда $x^2 = 4 + y^2$, и $x = \sqrt{y^2 + 4}$.

Тогда при изменении переменной y от 0 до $\frac{8}{3}$ переменная x изменяется от прямой $x = 2y - 2$ до гиперболы $x = \sqrt{y^2 + 4}$, $x \geq 2$.

Поэтому $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{y^2+4}} f(x,y)dx$.