18.09.2020
Лекция
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

На лекции рассматриваются вопросы:
1. Условный экстремум функции нескольких переменных.
2. Производная по направлению. Градиент.

1. Условный экстремум функции нескольких переменных

Экстремум функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что $\varphi(x, y) = 0$, называется ***условным.***

Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ называется ***уравнением связи***.

Геометрически задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремумов на кривой, по которой поверхность $z = f(x, y)$ пересекается с цилиндром $\varphi(x, y) = 0$.

Если из уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$ выразить $y = y(x)$ и подставить в уравнение $z = f(x, y)$, то задача отыскания условного экстремума сводится к нахождению экстремума функции одной переменной $z = f(x, y(x))$.

Пример. Найти экстремумы функции $z = x^2 - y^2$ при условии $y = 2x - 6$.

Решение.

Подставив $y = 2x - 6$ в уравнение $z = x^2 - y^2$, получим функцию одной переменной $z = x^2 - (2x - 6)^2 = -3x^2 + 24x - 36$.

Находим $z' = -6x + 24$; $z' = 0$ при $x = 4$.

Так как $z'' = -6 < 0$, то точка $(4; 2)$ является точкой условного максимума функции.

$z(4; 2) = 12$ — условный максимум функции.

2. Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$.

Задан некоторый вектор $\bar{l} = (l_x; l_y)$.

Тогда $|\bar{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ — длина вектора.

Направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\bar{l}|}, \ \cos\beta = \frac{l_y}{|\bar{l}|}.$$

При перемещении точки $M(x, y)$ в данном направлении в точку $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ функция z получит приращение $\Delta_l z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, называемое ***приращением функции z в направлении l.***

Производной z'_l ***по направлению l*** функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения Δl, когда последняя стремится к нулю, то есть

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная z'_l характеризует скорость изменения функции в направлении l.

Производная z'_l находится по формуле:

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta .$$

Пример. Найти производную функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ в точке $M(2; 5)$ в направлении вектора $\bar{l} = (-3; 4)$.

Решение.

Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6xy - 3x^2,\ z'_y = 3x^2 - 4y^3 .$$

Найдем их значение в точке $M(2; 5)$:

$$z'_x(M) = 6 \cdot 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2^2 = 48,$$

$$z'_y(M) = 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 5^3 = -476 .$$

Найдем длину вектора $\bar{l} = (-3; 4)$:

$$\left|\bar{l}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Найдем направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{4}{5} .$$

Тогда производная z'_l в точке $M(2; 5)$:

$$z'_l(M) = 48 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + (-476) \cdot \frac{4}{5} = -409{,}6 .$$

Градиентом $\overline{grad z}$ функции $z = f(x, y)$ называется вектор с координатами $(z'_x; z'_y)$.

Градиент функции $\overline{grad z}$ в данной точке характеризует направление максимальной скорости изменения функции в этой точке.

Градиент перпендикулярен линии уровня, проходящей через данную точку. Это позволяет с определенной погрешностью строить линии уровня.

Пример. Найти градиент функции $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$ в точке $M(2; 5)$.

Решение.

Так как $z'_x(M) = 48$, $z'_y(M) = -476$ (см. выше), то

$$\overline{grad} z(M) = (48; -476)$$

или

$$\overline{grad} z(M) = 48\bar{i} - 476\bar{j}.$$

Лекционное упражнение

№1. Найти градиент функции $z = xy^3 + 4x^2 y$ в точке $A(-1; 2)$.

№2. Найти градиент функции $z = \ln(4x^2 + 2xy)$ в точке $A(1; 2)$.

№3. Найти производную функции $z = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ в точке $A(2; -1)$ в направлении вектора $\vec{a} = (-3; 4)$.

№4. Найти производную функции $z = \arcsin \dfrac{y^2}{x}$ в точке $A(2; 1)$ в направлении вектора $\vec{a} = (\sqrt{2}; 1)$.

Самоконтроль правильности решения задач:

Ответы:

№1. $(-8; -8)$;

№2. $(1{,}5; 0{,}25)$;

№3. $0{,}2$;

№4. $\dfrac{4 - \sqrt{2}}{6}$.