. Случайные события, их виды.

- *Эксперимент, испытание, опыт* — это возникновение или преднамеренное создание определенного комплекса условий, результатом которого является тот или иной исход.
- *Событием* называется исход испытания.

Например, брошена монета — испытание; появление орла или решки — событие.

События обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$.

Классификация событий:

1. *Достоверное событие* — событие, которое обязательно происходит в результате испытания.
2. *Невозможное событие* — событие, которое не может произойти в результате данного испытания.
3. *Случайное событие* — событие, которое может либо произойти, либо не произойти в результате данного испытания.

Например*:*

1. Выпадение не более шести очков при бросании игральной кости — достоверное событие.
2. Выпадение десяти очков при бросании игральной кости — невозможное событие.
3. Выпадение трех очков при бросании игральной кости — случайное событие.

- *Элементарными* называются те из событий, которые нельзя разложить на составляющие их события.

Например, в опыте с бросанием игральной кости элементарными событиями являются выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- Множество всех элементарных событий называется *пространством элементарных событий* и обозначается Ω

Виды случайных событий:

- Несколько событий называются *совместными*, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Например, при бросании трех монет выпадение цифры на одной из них не исключает появления цифры на других.

- Несколько событий называются *несовместными*, если в результате эксперимента наступление одного из них исключает появление других.

Например, при одном бросании игральной кости события, состоящие в появлении цифры 2, 3, представляют два несовместных события.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n > 2)$ называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.
- Несколько событий называются *равновозможными*, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Например, при бросании игральной кости появление каждой из ее граней — события равновозможные.

- *Противоположным* событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (т.е. $\overline{A}$ означает, что событие A не наступило).

Например, выпадения орла или решки при подбрасывании монеты являются противоположными событиями.

- События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу* несовместных событий, если в результате данного испытания непременно произойдет только одно из них.

Например, выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании игральной кости образуют полную группу несовместных событий.

2.2. Понятие вероятности.

При исследовании большого количества одинаковых испытаний обнаруживаются определенные закономерности, которые можно описать, используя понятие вероятности.

Под вероятностью понимается некоторая числовая характеристика возможности наступления этого события. Существует несколько подходов к определению вероятности.

1. Статистическое определение вероятности.

Пусть при проведении n испытаний некоторое событие A появилось m раз. Число m называют *частотой* события A.

- Отношение $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой* (или *частостью*) события A.

При больших n относительная частота колеблется около некоторого числа.

- *Статистической вероятностью события A* называется число, около которого колеблется относительная частота события A при достаточно большом числе испытаний.

Например, английский ученый Пирсон произвел 23000 бросаний монеты. При этом герб появился 11512 раз. Значит, частотность появления герба равна $\frac{11512}{23000} \approx 0{,}5005$.

Этот пример показывает, что за вероятность появления герба можно взять число 0,5.

2. Классическое определение вероятности.

Пусть проводится опыт с n исходами, которые представляют полную группу несовместных равновозможных исходов.

- Исход называется *благоприятствующим событию A*, если он приводит к наступлению события A.
- *Вероятностью события A* называется отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех исходов, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1. Вероятность любого события $0 \le P(A) \le 1$.
2. Вероятность невозможного события равна 0.
3. Вероятность достоверного события равна 1.

Пример 2.1. В урне находится 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение.

A — вынут белый шар.

Общее число всех равновозможных исходов равно количеству шаров в урне, т.е. $n = 12+8 = 20$.

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно количеству белых шаров, т.е. $m = 12$.

Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6$.

Пример 2.2. Найти вероятность появления грани с четным числом очков при подбрасывании игральной кости.

Решение.

A — выпадение грани с четным числом очков.

$n = 6$ (т.к. у игральной кости 6 граней).

$m = 3$ (т.к. у игральной кости 3 грани с четным числом очков: 2, 4, 6).

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2.3. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

Решение.

A — при бросании игральной кости выпадет число очков, кратное 3.

$n=6,\ m=2.$

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пример 2.4. На пяти карточках разрезной азбуки написаны буквы а, в, с, е, н. Одна за другой наугад выбираются пять карточек и располагаются в ряд в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «весна».

Решение

A — появится слово «весна».

Так как в каждом исходе берется все множество из 5 элементов (букв), и каждый исход отличается от другого только порядком следования элементов, то общее число исходов будет равно числу перестановок из 5 элементов, т.е.

$$n=P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

При этом слово «весна» появится лишь один раз, т.е. m = 1.

Значит, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{120}.$

Пример 2.5. В партии из 15 деталей есть 3 нестандартные. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу 5 деталей будет 2 нестандартные.

Решение

A — среди 5 выбранных деталей есть 2 нестандартные.

Запишем условие в виде схемы:

15 дет. — 12 ст. — 3 нест.
↓ ↓ ↓
5 дет. — 3 ст. — 2 нест.

(В первой строке указано то, что дано, во второй — то, что хотим получить).

Так как порядок выбора деталей не имеет значения, то общее число исходов испытаний будет равно числу сочетаний из 15 элементов по 5 элементов, т.е.

$$n = C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!10!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = 1\cdot13\cdot7\cdot3.$$

При вычислении числа исходов, благоприятствующих событию A, так же используем формулу числа сочетаний и правило умножения:

$$m = C_{12}^{3}C_{3}^{2} = \frac{12!}{3!9!}\cdot\frac{3!}{2!1!} = \frac{1\cdot\ldots\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot\ldots\cdot9}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2} = 10\cdot11\cdot2\cdot3.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10\cdot11\cdot2\cdot3}{11\cdot13\cdot7\cdot3} = \frac{20}{91}.$$

Общая схема решения задач о выборке:

$$\begin{array}{ccccc} k & = & k_1 & + & k_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ p & = & p_1 & + & p_2 \end{array}$$

$$n = C_k^p;$$

$$m = C_{k_1}^{p_1}C_{k_2}^{p_2};$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{k_1}^{p_1}C_{k_2}^{p_2}}{C_k^p}.$$

Замечание. Классическое определение вероятности применимо при двух условиях:

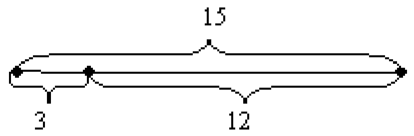
1) все исходы опыта должны быть равновероятными;

2) опыт должен иметь конечное число исходов.

На практике бывает сложно доказать, что события равновероятные: например, при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д., кроме того, существуют опыты с бесконечным числом исходов.

Пример 2.6 Ребенок бросает мяч, и максимальное расстояние, на которое он может забросить мяч – 15 метров. Найти вероятность того, что мяч улетит за отметку 3 м.

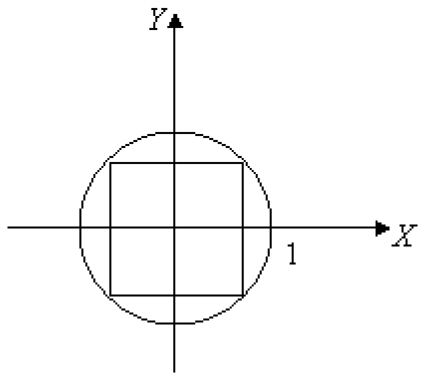
Решение. Искомую вероятность предлагается считать, как отношение длины отрезка, находящегося за отметкой 3 м (благоприятная область) к длине всего отрезка (всевозможные исходы):



$$P(A) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Пример 2.7. Точку случайным образом бросают в круг радиуса 1. Какова вероятность того, что точка попадет во вписанный в круг квадрат?

Решение. Под вероятностью того, что точка попадет в квадрат, понимают в данном случае отношение площади квадрата (благоприятной площади) к площади круга (общая площадь фигуры, куда бросают точку):



Диагональ квадрата равна 2 и выражается через его сторону по теореме Пифагора:

$$2 = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\text{квадрата}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2 = \pi$$

$$P(\text{точка попадет в квадрат}) = \frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{2}{\pi}$$

Аналогичные рассуждения проводят и в пространстве: если в теле объема случайным образом выбирается точка, то вероятность того, что точка окажется в части тела объема v, вычисляется как отношение объема благоприятной части к общему объему тела:

$$P_V(v) = \frac{v}{V}.$$

Объединяя все случаи, можно сформулировать правило вычисления геометрической вероятности:

Если в некоторой области G случайным образом выбирается точка, то вероятность того, что точка окажется в части g этой области равна:

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)},$$ где

$mes(g)$ - обозначает меру области: в случае отрезка – это длина, в случае плоской области – это площадь, в случае пространственного тела – это объем, на поверхности – площадь поверхности, на кривой – длина кривой.