ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

С комплексными числами можно выполнять все те операции, которые производились над действительными числами. Их можно складывать, вычитать, умножать, делить и т.д. Комплексные числа нельзя только сравнивать: здесь нет понятий «больше» и «меньше».

Пусть $\alpha_1 = a_1 + ib_1, \quad \alpha_2 = a_2 + ib_2$ — два комплексных числа.

1. *Суммой* $\alpha_1 + \alpha_2$ комплексных чисел α_1 и α_2 называется комплексное число

$$\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

2. Аналогично определяется *разность*:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

3. *Произведением* $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ называется комплексное число

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Например:

1) $i^2 = i \cdot i = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + i(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = -1;$

2) $\alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 + b^2$ — всегда действительное число.

4. *Частным* $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ от деления α_1 на $\alpha_2 \neq 0$ называется комплексное число β, которое удовлетворяет условию $\beta \cdot \alpha_2 = \alpha_1$. Для частного имеет место формула

$$\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 \cdot \overline{\alpha_2}}{\alpha_2 \cdot \overline{\alpha_2}}$$ и т.д. — комплексное число.

Простейший анализ введенных операций показывает, что арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме выполняются по тем же правилам, по которым они выполнялись на множестве действительных чисел над двучленами и многочленами с последующей заменой $i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \ldots$

Так, например, на множестве комплексных чисел остаются справедливыми формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Пример 3

$$(3+2i)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2i + (2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 =$$

$$= 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i.$$

Пример 4. Даны комплексные числа $\alpha_1 = 2+5i$ и $\alpha_2 = 3+4i$.

Найти: 1) $\alpha_1 + \alpha_2$; 2) $\alpha_1 \cdot \alpha_2$; 3) $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Р е ш е н и е

1) $\alpha_1 + \alpha_2 = (2+5i) + (3+4i) = (2+3) + i(5+4) = 5 + 9i.$

2) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (2+5i)(3+4i) = 2\cdot 3 + 2\cdot 4i + 5i\cdot 3 + 5i\cdot 4i =$

$$= 6 + 8i + 15i + 20i^2 = 6 + 23i - 20 = -14 + 23i.$$

3) $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{2+5i}{3+4i} = \dfrac{(2+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{6 - 8i + 15i - 20i^2}{3^2 - (4i)^2} =$

$$= \frac{6 + 7i + 20}{9+16} = \frac{26+7i}{25} = \frac{26}{25} + \frac{7}{25}i.$$

Пример 5. На плоскости комплексного переменного Z построить множества точек, которые определяются условиями:

1) $\operatorname{Re} z = 2$; 2) $|z| < 2$; 3) $Jmz^2 = 3$.

Р е ш е н и е. 1) Для $z = x + iy$ имеем $\operatorname{Re} z = x$.

Поэтому $\operatorname{Re} z = 2 \Leftrightarrow x = 2$.

А это — уравнение прямой, перпендикулярной оси *Ox* (рис. 3).

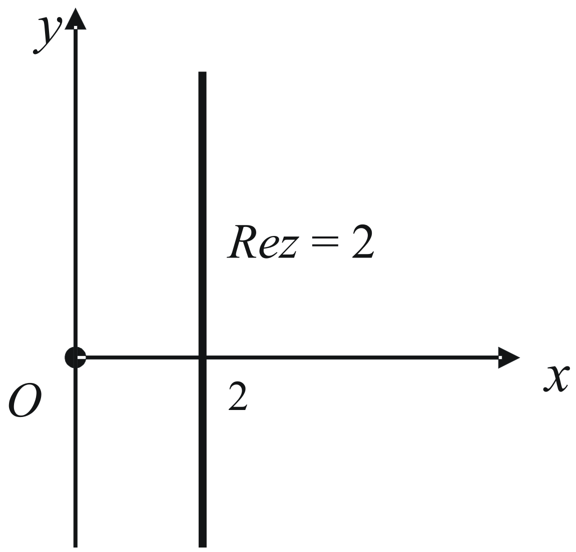

Рис. 3. Множество точек z,
для которых Rez = 2

2) Для $z = x + iy$ имеем $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поэтому $|z| < 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 4$. Это неравенство определяет внутреннюю часть круга (рис. 4).

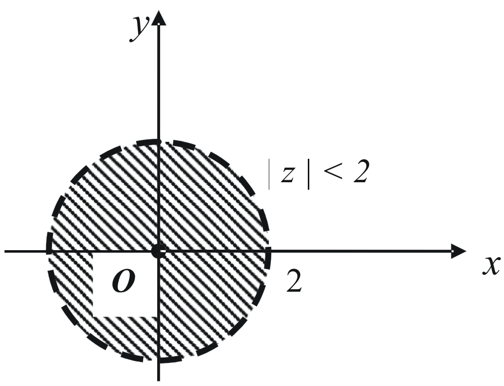

Рис. 4. Множество точек z,
для которых | z | < 2

3) Для $z = x + iy$ имеем

$$z^2 = x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad Jmz^2 = 2xy.$$

Поэтому $Jmz^2 = 2 \Leftrightarrow 2xy = 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{x}$.

Этому условию удовлетворяют точки, лежащие на гиперболе (рис. 5).

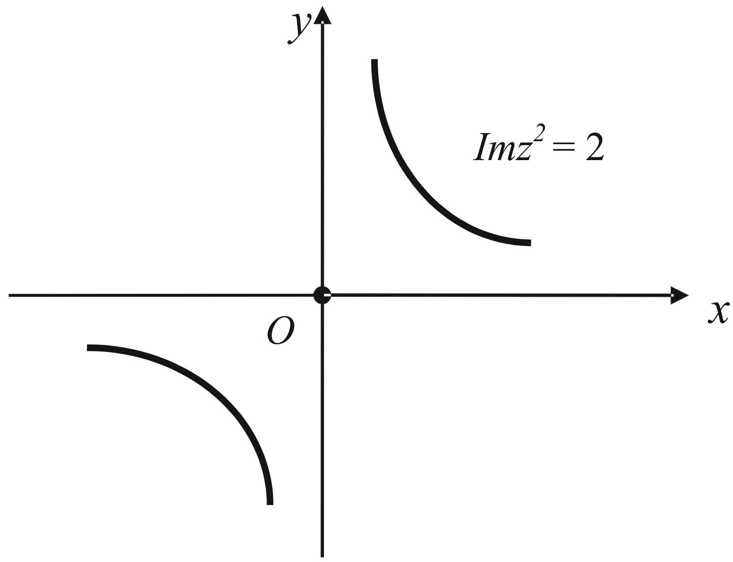

Рис. 5. Множество точек z, для которых $\mathrm{Im}\,z^2 = 2$