1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение двойного интеграла и его свойства

Кратные интегралы — это интегралы от функций нескольких переменных, заданных в какой-либо области двумерного, трехмерного или n-мерного пространства. Среди кратных интегралов различают двойные, тройные и т.д. n-кратные интегралы.

Чтобы дать определения двойного и тройного интегралов, необходимо ввести понятия связного и открытого множеств точек n-мерного пространства.

Def 1. Множество точек n-мерного пространства называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Def 2. Расстоянием между двумя произвольными точками $M_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $M_2(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ n-мерного пространства называется число

$$\rho(M_1,\ M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}\ .$$

Def 3. Открытым n-мерным шаром с центром в точке A этого пространства и радиуса $R > 0$ называется множество точек n-мерного пространства, отстоящих от точки A на расстояние, меньшее R, т.е. $\{M{:}\rho(M,A)<R\}$.

Def 4. Открытый шар радиуса ε с центром в точке A называется ε-окрестностью точки А.

На плоскости ε-окрестность точки представляет собой открытый круг с центром в точке A и радиуса ε.

Def 5. Точка A, называется *внутренней* точкой множества $\{M\}$, если существует ε-окрестность точки A, целиком принадлежащая множеству $\{M\}$ (рис. 1).

Def 6. Точка N_0 называется *граничной точкой* множества $\{M\}$, если *в любой* ε-окрестности этой точки содержатся точки, как принадлежащие множеству $\{M\}$, так и не принадлежащие ему (см. рис. 2).

Def 7. Множество $\{M\}$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

Def 8. Множество точек $\{M\}$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки. Множество всех граничных точек множества $\{M\}$ называется *его границей*.

Def 9. Открытое связное множество называется *областью этого пространства*, а объединение области и ее границы — *замкнутой областью*.

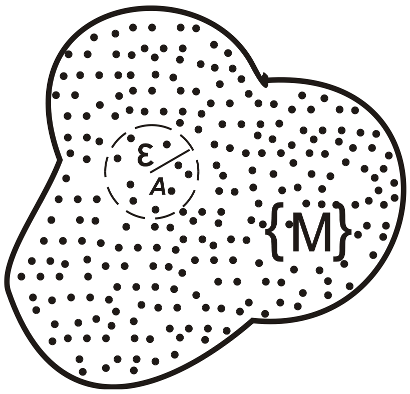


Рис. 1

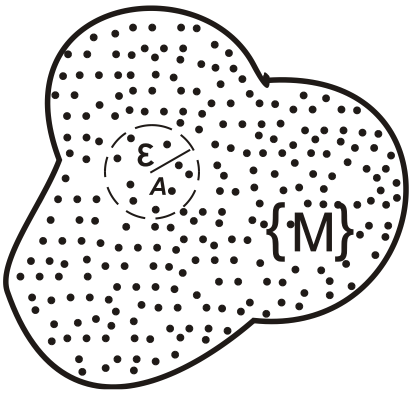


Рис. 2

Пусть в замкнутой области D плоскости Oxy задана функция $z = f(x, y)$. Разобьем область D произвольными линиями на n частей без общих внутренних точек. Каждую из частей разбиения будем называть «элементарной областью» или «элементарной площадкой» разбиения и обозначать S_i, а их площади соответственно $\Delta S_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ (рис. 3).

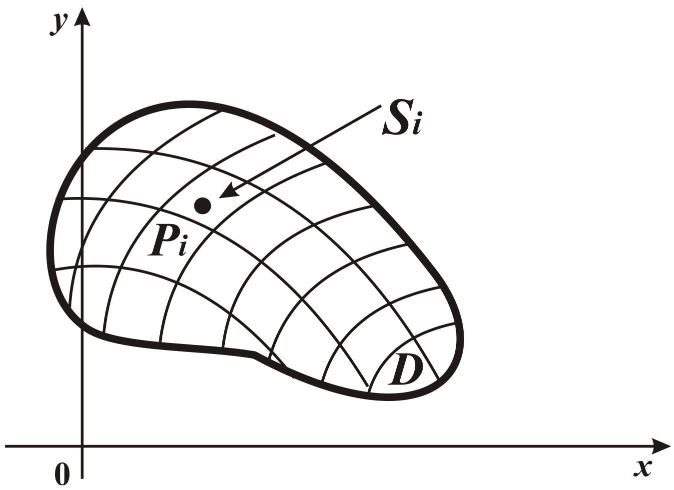


Рис. 3

В каждой области S_i выберем произвольную точку $P_i(x_i;\ y_i)$, вычислим значения функции в этих точках:

$$f(P_i) = f(x_i;\ y_i)$$

и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta S_i \tag{1}$$

Сумма (1) называется *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y)$ в области D.

Ясно, что, в силу произвольного разбиения области D на элементарные части и выбора точек P_i, можно составить бесчисленное множество интегральных сумм.

Наибольшее расстояние между двумя точками элементарной области S_i будем называть *диаметром* этой области и обозначать d_i. Тогда $max d_i$ — наибольший из диаметров всех элементарных областей разбиения. Теперь можно дать определение двойного интеграла.

Def 10. Если существует конечный предел интегральной суммы (1), когда n стремится к бесконечности так, что $max d_i \to 0$, и этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)dS$

Таким образом,

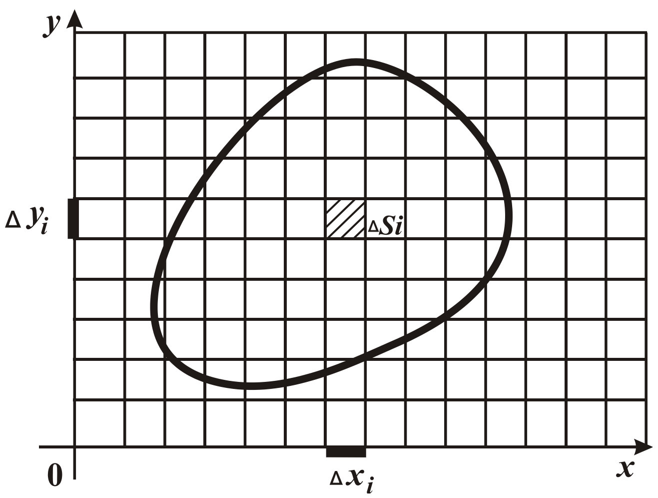
$$\iint\limits_D f(x,y)dS \overset{def}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i . \qquad (2)$$

Если для функции $f(x;y)$ в области D выполняется равенство (2), то функция $f(x,y)$ называется *интегрируемой* в области D; D — областью интегрирования; x и y — переменные интегрирования; ΔS — элемент площади. Имеет место следующая теорема, которую мы примем без доказательства.

ТЕОРЕМА 1. Достаточное условие интегрируемости функции

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D, то она интегрируема в этой области.

Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой в области D функции предел в равенстве (2) не зависит от способа разбиения области интегрирования на части, поэтому область D можно разбить на элементарные площадки прямыми, параллельными координатным осям (рис. 4).



Р*ис. 4*

Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, а $dS = dxd$, и равенство (2) можно записать в виде

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\max d_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i .$$

Свойства двойного интеграла и их доказательства аналогичны свойствам и доказательствам определенного интеграла. Ниже перечислим свойства двойного интеграла для интегрируемых функций, используемые при вычислении интегралов.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_D C \cdot f(x,y)dS = C\iint_D f(x,y)dS .$$

2. Интеграл от суммы (разности) интегрируемых в области D функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций по области D:

$$\iint_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)dS = \iint_D f_1(x,y)dS \pm \iint_D f_2(x,y)dS .$$

3. Свойство аддитивности

Если область D разбить линией на две части D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D равен сумме интегралов от этой функции по каждой из частей:

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS .$$

Def 15. Область $D = \{(x,y): c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — непрерывные на отрезке $[c; d]$ функции называется x-трапециевидной (рис. 11).

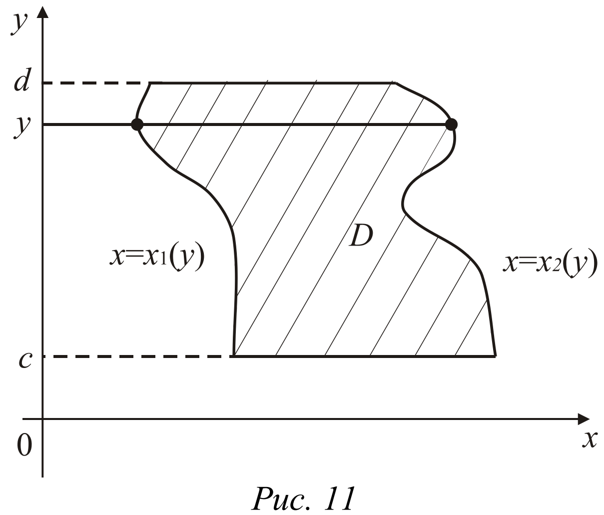


Рис. 11

Аналогично можно дать определение повторного интеграла по x-трапециевидной области:

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy. \quad (17)$$

Сначала вычисляют внутренний интеграл по переменной x, считая y константой, затем внешний интеграл по переменной y как определенный интеграл.

Замечание. Следует помнить, что пределы у внешнего интеграла всегда числа, а у внутреннего интеграла — числа, если область интегрирования является прямоугольником со сторонами, параллельными координатным осям, или функции, зависящие от той переменной, по которой «берется» внешний интеграл.

Можно доказать, что двойной интеграл от непрерывной функции $f(x; y)$ по y-трапециевидной области равен повторному интегралу по этой области, т.е.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \quad (18)$$

Аналогично, если $f(x; y)$ непрерывна в x- трапециевидной области D, то

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \quad (19)$$

Если область D можно задать как y-трапециевидную, а также и как x-трапециевидную, то из равенств (18) и (19) следует, что

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx. \quad (20)$$

Переход от левой части равенства (20) к правой его части и обратно называется *изменением порядка интегрирования* в двойном интеграле.

Аддитивность двойного интеграла позволяет изменять порядок интегрирования в случаях, когда область D — произвольная.

Пример 1

Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.

Решение

Используем формулу (16)

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}=\int_1^2\left[\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}\right]dx=\int_1^2\left[x^2\int_{\frac{1}{x}}^{x}y^{-2}dy\right]dx=\int_1^2\left[x^2\left.\frac{-1}{y}\right|_{\frac{1}{x}}^{x}\right]dx=-\int_1^2\left[x^2\frac{1}{x}-x^3\right]dx=$$

$$=-\int_1^2\left(x-x^3\right)dx=\left.\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\right|_1^2=-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\left(2^4-1\right)=-\frac{3}{2}+\frac{15}{4}=\frac{9}{4}=2,25$$

Пример 2

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D\left(x+2y\right)dxdy,$$

если область D ограничена линиями $x = 1$; $y=\sqrt{x}$; $y = -x^2$.

Решение

Построим область D (рис. 12) $D=\left\{\left(x,y\right):\ 0\le x\le 1,\ -x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

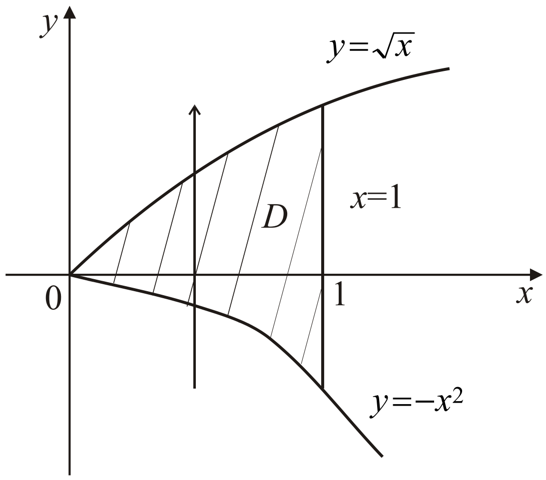


Рис. 12

Область интегрирования является y-трапециевидной:

$$\iint_D\left(x+2y\right)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-x^2}^{\sqrt{x}}\left(x+2y\right)dy=\int_0^1\left[\int_{-x^2}^{\sqrt{x}}\left(x+2y\right)dy\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\left.\left(xy+y^2\right)\right|_{-x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx=\int_0^1\left(x\sqrt{x}+x^3+x-x^4\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{3}{2}}+x^3+x-x^4\right)dx=\left.\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{19}{20}$$

Ответ: $\frac{19}{20}$.