Полем в математике называют часть плоскости или пространстве, в каждой точке которой задано значение скалярной или векторной величины. В первом случае поле называют **скалярным,** во- втором – **векторным.**

Скалярными полями являются: поле температур, поле влажности воздуха, поле плотности, поле атмосферного давления и т.д.

Векторными полями являются: поле тяготения, поле магнитной напряженности, электрическое поле.

Скалярное поле определяется функцией точки или функцией нескольких переменных. Для скалярного поля важную роль играют две его характеристики – **производная по направлению и градиент.**

Если поле определяется (задается) функцией u=f(x,y,z), то производную по направлению вектора $\vec{a}$ вычисляют по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (34)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Вектор градиент находят по формуле

$$\vec{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \qquad (35)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты направленные по координатным осям.

<u>Пример</u> 40 Дана функция $u=x^2y^3z$, точка B(1;1;2) и вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Требуется найти:

1) $\vec{grad}\, u$ в точке B;

2) производную функции **u** в точке B по направлению вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка. В произвольной точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z, \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2z, \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y^3.$$

В точке B(1;1;2): $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_B = 4, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_B = 6, \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_B = 1.$

По формуле (35) найдем вектор градиент в точке B

$$\overrightarrow{gradu}\Big|_B = 4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}.$$

Найдем теперь направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|},$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\vec{a}$; $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

В нашем примере $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ т.е. $a_x=2, a_y=4, a_z=4$. Поэтому

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6,\text{а}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Производную функции u в точке B по направлению вектора $\vec{a}$ найдем по формуле (34)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}}\Big|_B = 4\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=6.$$