При исследовании функции z=f(x,y) на экстремум (минимум и максимум)следует:

а) найти частные производные z'_x, z'_y;

б) найти **критические точки**, т.е. точки, в которых z'_x, z'_y, не существуют или равны нулю;

в) проверить наличие экстремума в каждой из полученных критических точек. Это можно сделать либо по определению экстремума, либо с помощью достаточного признака.

Достаточный признак экстремума функции z=f(x,y).

Пусть в точке $M_0(x_0;y_0)$ частные производные первого порядка существуют и равны нулю. Пусть A= $z''_{xx}\big|_{M_0}$,B= $z''_{xy}\big|_{M_0}$, C= $z''_{yy}\big|_{M_0}$ и

$\Delta=AC-B^2$.

Тогда:

1) если $\Delta.>0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ есть экстремум: максимум (при $A<0$) или минимум (при $A>0$);
2) если $\Delta.<0$, то в точке $M_0(x_0;y_0)$ нет экстремума.

В случае $\Delta.=0$, в точке $M_0(x_0;y_0)$ экстремум может быть, а может и не быть. Необходимы дополнительные исследования.

<u>Пример</u> 38. Найти экстремум функции

$$z=x^3+y^3-3xy+5.$$

Решение. а)Находим

$z'_x = 3x^2 - 3y$ и $z'_y = 3y^2 - 3x$.

б) Находим критические точки. Точки, в которых $z_x^{'} = 3x^2 - 3y$ и $z_y^{'} = 3y^2 - 3x$ не существуют отсутствуют. Находим точки, в которых частные производные обращаются в ноль. Для этого решаем систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $x_1=0$, $x_2=1$, а из первого уравнения $y_1=0$, $y_2=1$.

Следовательно, имеем две критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

в) Выясняем наличие экстремума функции в этих точках с помощью достаточного признака. Для этого находим

$$z_{xx}^{''} = 6x, z_{xy}^{''} = -3, z_{yy}^{''} = 6y.$$

В точке $M_1(0;0)$ имеем:

$$A = 6x\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, B = -3, C = 6y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0, \Delta = -9.$$

Так как $\Delta<0$, то в точке $M_1(0;0)$ нет экстремума.

В точке $M_2(1;1)$ имеем:

$$A = 6x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6, B = -3, C = 6y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6, \Delta = 6 \cdot 6 - 9 > 0.$$

Так как $\Delta>0$, то в точке $M_2(1;1)$ есть экстремум. А так как $A=6>0$, то в точке $M_2(1;1)$ есть минимум. При этом

$$z_{\min} = z\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 4.$$