Интегралы от рациональных функций.

Общие сведения. **Рациональной** функцией переменной x называют функцию, получающуюся из x и постоянных чисел с помощью арифметических действий (+, -, ·, :).

Например,

$P_m(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – целая рациональная функция **(многочлен степени m),**

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – дробно-рациональная функция **(рациональная дробь).**

Рациональную функцию относительно переменной x будем обозначать через r(x). Если вместо x взять какую-нибудь функцию, то получится рациональная функция относительно этой функции. Например, r(sinx) – рациональная функция относительно sinx. Аналогично понимаются: r(cosx) , r(tgx), $r\left(\sqrt[n]{ax+b}\right)$, r(sinx, cosx), $r\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)$ и т.д.

Таблица 2. Классификация рациональных функций.

<table>
<tr><td rowspan="5">r(x)
-рациональная функция относительно x</td><td colspan="3">Частные случаи</td></tr>
<tr><td colspan="3">а) $\mathbf{P_m(x)}$ – многочлен,</td></tr>
<tr><td rowspan="3">б) $\dfrac{\mathbf{P_m(x)}}{\mathbf{Q_n(x)}}$ -
-рациональная дробь</td><td rowspan="2">m<n
Правильная рациональная дробь (ПРД)</td><td>б. 1) Простейшие рациональные дроби</td></tr>
<tr><td>б. 2) Произвольные ПРД,</td></tr>
<tr><td>m ≥ n</td><td>б. 3) Неправильная рациональная дробь(НРД)</td></tr>
</table>

Рассмотрим все случаи таблицы 2.

а) Интеграл от многочлена разбивают на сумму интегралов от степенных функций и применяют табличную формулу 1.

Например, $\int(6x^2-4x+5)dx=6\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx=6\cdot\frac{x^3}{3}-$

$-4\cdot\frac{x^2}{2}+5x+C==2x^3-2x^2+5x+C.$

б.1.) **Простейшими рациональными дробями** называют дроби четырех видов:

$$1)\frac{1}{ax+b};\quad 2)\frac{1}{(ax+b)^k};\quad 3)\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c};\quad 4)\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k};$$

где $k\in N$ ($k\geq2$), а в квадратном трехчлене b^2-4ac<0.

Интегралы от простейших рациональных дробей 1-го и 2-го типа находят с помощью замены ax+b=t или подведения ax+b под знак дифференциала $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$.

<u>Примеры:</u>11. $\int\frac{1}{5x-3}dx=\frac{1}{5}\int\frac{d(5x-3)}{5x-3}=\frac{1}{5}\ln(5x-3)+C;$

12. $\int\frac{1}{(3-4x)^3}dx=\left|\begin{array}{l}Замена:\\ 3-4x=t\\ -4dx=dt\\ dx=-\frac{1}{4}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{4}\int t^{-3}dt=-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=$

$=\frac{1}{8t^4}+C=\frac{1}{8(3-4x)^2}+C.$

В простейших рациональных дробях 3-го и 4-го типа в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}k+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^2+$$

$+c-\frac{b^2}{4a}$ и делают замену $\mathbf{x}+\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}=\mathbf{t}$.

<u>Пример 13.</u> Найти $\int\frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx.$

Решение.

$$\int \frac{2x-2}{x^2-6x+13}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-6x+13= \\ = x^2-6x+9+4= \\ = (x-3)^2+4, \\ x-3=t, \\ x=t+3, dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{2(t+3)-2}{t^2+4}dt = \int \frac{2t+4}{t^2+4}dt = \int \frac{2tdt}{t^2+4} +$$

$$+4\int \frac{dt}{4+t^2} = \int \frac{d(t^2+4)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \ln\left|t^2+4\right| + 4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \ln\left|x^2-6x+13\right| + 2arctg\frac{x-3}{2} + C.$$

Замечание. **Такой прием используют и в других интегралах содержащих квадратный трехчлен.**

б.2) **Произвольные ПРД** сначала разлагают на сумму простейших рациональных дробей, а затем интегрируют . Для разложения ПРД на сумму простейших ее знаменатель представляют в виде произведения линейных и квадратичных (с отрицательным дискриминантом) множителей. Одинаковые множители, если они имеются, обязательно перемножаются. После этого дробь заменяют на сумму простейших с неопределенными коэффициентами. Примеры разложения по схеме (3.6):

14. $\dfrac{3x-4}{x(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$,

15. $\dfrac{2x+5}{(x-1)(x+3)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{(x+3)^2}$,

16. $\dfrac{x}{(x+2)(x^2+8)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+8}$.

Для отыскания неопределенных коэффициентов A, B, C,…правую часть полученного равенства приводят к общему знаменателю и приравнивают числители левой и правой частей. После этого:

- либо **подставляют** в полученное равенство **конкретные значения x** (лучше всего – корни знаменателя исходной дроби),
- либо **приравнивают** в полученном равенстве **коэффициенты при одинаковых степенях x** (в этом случае имеющиеся скобки надо раскрыть и привести подобные).

В результате получается система для определения A, B,…

Замечание. Иногда удобно использовать оба эти способа одновременно.

Пример 17 Найти интеграл $\int \frac{x^2+8}{x^3-8}dx$.

Решение. Разложим ПРД $\frac{x^2+8}{x^3-8}$ (m=2<n=3) на сумму простейших. Так как $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$, то

$$\frac{x^2+8}{x^3-8}=\frac{x^2+8}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Приводя в правой части к общему знаменателю и приравнивая числители дробей, получим

$$x^2+8=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2). \qquad (16)$$

Найдем коэффициенты A, B, C первым способом. Для этого подставим в (16) последовательно x=2 (корень знаменателя исходной дроби), x=0 и x=1 (наиболее удобные целые числа), тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} &при..x=2:12=12A,\\ &при..x=0:8=4A-2C,\\ &при..x=1:9=7A-B-C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A&=1,\\ C&=-2,\\ B&=0. \end{aligned}$$

Покажем как найти A, B, C вторым способом .Для этого в равенстве (16) раскроем скобки и сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые степени x:

$$x^2+8=x^2(A+B)+x(2A-2B+C)+(4A-2C).$$

Последовательно приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0, получим

$$\left.\begin{array}{l} при..x^2: 1 = A + B \\ при..x^1: 0 = 2A - 2B + C, \\ при..x^0: 8 = 4A - 2C \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1, B = 0, C = -2.$$

От выбранного способа зависит только вид системы. Таким образом, заданный интеграл равен

$$\int \frac{x^2+8}{x^3-8}dx = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-2}{x^2+2x+4}\right)dx = \int \frac{dx}{x-2} - 2\int \frac{dx}{x^2+2x+4} = \int \frac{d(x-2)}{x-2} -$$

$$-2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+3} = \ln|x-2| - \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

б.3)Для нахождения интегралов от **неправильной рациональной дроби** в ней выделяют целую часть. Этого добиваются либо, выделяя в числителе множитель подобный знаменателю и производя почленное деление, либо просто делят числитель на знаменатель и используют формулу

$$\frac{делимое}{делитель} = частное + \frac{остаток}{делитель} \qquad (17)$$

Пример 18. Найти $\int \frac{2x^4+x^3+x^2-16x}{x^3-8}dx.$

Решение. Подинтегральная функция – НРД, так как m=4>n=3. Разделим числитель на знаменатель

$$2x^4+x^3+x^2-16x \,|\, x^3-8$$

$$-............................\overline{2x+1}-частное$$

$$\frac{2x^4-16x}{x^3+x^2}$$

$$-$$

$$\frac{x^3-8}{x^2+8-остаток}$$

Следовательно, по формуле (17) можно записать

$$\frac{2x^4 + x^3 + x^2 - 16x}{x^3 - 8} = 2x + 1 + \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8}.$$

Поэтому

$$\int \frac{2x^4 + x^3 + x^2 - 16x}{x^3 - 8} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{x^2 + 8}{x^3 - 8} \right) dx = \left| \begin{matrix} \textit{учитывая} \\ \textit{пример..}17 \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 + x + \ln|x - 2| - \frac{2}{\sqrt{3}} \, arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$