

Понятие неопределенного интеграла.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называют множество (совокупность) всех ее первообразных, т.е. функций $F(x)$, удовлетворяющих условию $F'(x) = f(x)$. Неопределенный интеграл обозначают $\int f(x)dx$. Таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где: $F'(x) = f(x)$;

x - переменная интегрирования;

$f(x)$ – подинтегральная функция;

$f(x)dx$ – подинтегральное выражение.

Таблица основных интегралов.

$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1).$	$1.1. \int dx = x + C.$
$1.2 \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$1.3 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C.$
$2. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	
$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	
$3.1. \int e^x dx = e^x + C.$	$3.2. \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$
$4. \int \sin x dx = -\cos x + C.$	$4.1. \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C.$
$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$	$5.1. \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + C.$
$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$	
$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	
$8. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\text{или} \dots - \arccos \frac{x}{a} + C.$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\text{или...} - \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

Дополнительные формулы.

$$13. \int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |x^2 \pm a^2| + C.$$

$$14. \int \frac{\varphi'(x) dx}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$15. \int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

$$16. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$20. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$17. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$21. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

В каждой из этих формул переменную x можно заменять на любую (дифференцируемую) функцию $z(x)$.

$$\text{Например: } \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{d(\ln x)}{1+(\ln x)^2} = \operatorname{arctg}(\ln x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла.

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \text{ Этим свойством пользуются для проверки}$$

полученного результата.

$$2. d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx. \text{ Это свойство показывает, что операции } \int \text{ и } d$$

взаимно обратны.

3. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$

4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx,$ где $k \neq 0$ постоянное.

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(z)dz = F(z) + C,$

где $z=z(x)$ – дифференцируемая функция.