

Разделим первое уравнение на a_{11} , чтобы коэффициент при x_1 стал равным 1 (на практике этого, чаще всего, достигают, меняя местами уравнения или слагаемые в уравнениях):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Умножим первое уравнение системы (1.2) на $(-a_{21})$, затем на $(-a_{31})$, ..., $(-a_{m1})$ и прибавим, соответственно, ко второму, третьему, ..., m -му уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{array} \right.$$

где a'_{ij} , b'_i — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после первого шага.

2 шаг: аналогично, с помощью второго уравнения полученной системы исключим x_2 из всех уравнений, начиная с третьего.

Пусть $a'_{22} \neq 0$. Разделим второе уравнение на a'_{22} :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \dots + \frac{a'_{2n}}{a'_{22}}x_n = \frac{b'_2}{a'_{22}}, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{array} \right.$$

Умножим второе уравнение системы на $(-a'_{32})$, затем на $(-a'_{42})$, ..., $(-a'_{m2})$ и прибавим соответственно к третьему, четвертому, ..., m -му уравнениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a''_{m3}x_3 + \dots + a''_{mn}x_n = b''_m, \end{array} \right.$$

где a''_{ij} , b''_i — новые значения коэффициентов и свободных членов, полученные после второго шага.

Продолжаем этот процесс, пока не приведем систему к ступенчатому виду. Если при этом получаются уравнения вида $0 = 0$, то их вычеркиваем, т.к. они являются тождествами. Если же появляется уравнение вида $0 = b_i$, где $b_i \neq 0$, то, следовательно, система несовместна.

В результате прямого хода может быть получена система *треугольного* или *трапециoidalного* ступенчатого вида.

Если получается система *треугольного* вида

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1n}x_n = l_1, \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2n}x_n = l_2, \\ x_3 + \dots + c_{3n}x_n = l_3, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ x_n = l_n, \end{array} \right.$$

в которой число уравнений n равно числу неизвестных n , то она имеет единственное решение, т.е. является совместной определенной. Это решение находится в результате обратного хода. Из последнего уравнения системы (1.4) определяется x_n . Подставляем его в предпоследнее уравнение и находим x_{n-1} . Затем определяем x_{n-2} , ..., x_1 .

Пример 1. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{array} \right.$$

Решение.

Применяя метод последовательного исключения неизвестных, удобнее решать систему, когда в первом уравнении коэффициент при x_1 равен 1. Поэтому поменяем местами первое и второе уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

С помощью первого уравнения исключим неизвестное x_1 из всех остальных уравнений, начиная со второго. Для этого первое уравнение умножим на (-2) и прибавим ко второму и третьему. Затем первое уравнение умножим на (-1) и прибавим к четвертому. Получится система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -5, \\ -2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

С помощью второго уравнения исключим неизвестное x_2 из всех остальных уравнений, начиная с третьего. Второе уравнение прибавим к третьему, четвертое уравнение перепишем без изменений, т.к. в нем неизвестного x_2 нет:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -6x_3 - x_4 = -5, \\ -2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Разделим обе части четвертого уравнения на (-2) и поменяем его местами с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ -6x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$$

С помощью третьего уравнения исключим неизвестное x_3 из четвертого. Умножим третье уравнение на 6 и прибавим к четвертому:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ -7x_4 = 7. \end{cases}$$

Получили систему треугольного вида.

Из последнего уравнения найдем $x_4 = -1$.

Подставим значение x_4 в третье уравнение и найдем x_3 :

$$x_3 + 1 = 2,$$

$$x_3 = 1.$$

Подставим значения x_3 и x_4 во второе уравнение и найдем x_2 :

$$x_2 + 1 - 1 = 0,$$

$$x_2 = 0.$$

Подставим значения x_3 , x_4 , x_2 в первое уравнение и найдем x_1 :

$$x_1 + 0 + 5 - 2 = 1,$$

$$x_1 = -2.$$

Данная система имеет единственное решение:

$$x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 1; x_4 = -1.$$

Ответ: $(-2; 0; 1; -1)$.