



## ЗАДАЧА 4. Построение эпюр внутренних усилий для статически определимых рам

### Методические указания

Решению задачи должно предшествовать повторение правил построения и проверки эпюр внутренних усилий  $Q$ ,  $M$  и  $N$  из курса сопротивления материалов.

При построении эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$  условимся придерживаться следующих правил:

1. Ось любого стержня принимать за ось абсцисс.

2. Вычисленные ординаты эпюр внутренних усилий откладывать перпендикулярно осям элементов рамы:

a) положительные ординаты эпюры поперечных сил вверх от оси горизонтального (или близкого к нему) элемента и влево от оси вертикального (или близкого к нему) элемента, а отрицательные - соответственно вниз и вправо от оси;

b) ординаты эпюры изгибающих моментов со стороны растянутых волокон, т.е. положительные ординаты вниз от оси горизонтального (или близкого к нему) элемента, а отрицательные - соответственно вверх и влево от оси;

c) ординаты эпюры продольных сил симметрично по обе стороны от оси рассматриваемого элемента.

3. Эпюры штриховать прямыми линиями, перпендикулярными осям элементов рам.

4. На эпюрах  $Q$  и  $N$  ставить знаки: на участках эпюр с положительными ординатами - плюс, с отрицательными - минус.

Знаки, поставленные на эпюре  $Q$ , не дают представления о характере деформации элемента.

Знаки, поставленные на эпюре  $N$ , отражают характер деформации элементов рамы: плюс - растяжение, минус - сжатие.

На эпюре  $M$  необходимость в постановке знаков отпадает, так как эпюра строится со стороны растянутых волокон и поэтому ее очертание вполне определяет расположение растянутых и сжатых зон у всех элементов рамы и тем самым отражает характер деформации их.

При расчете необходимо максимально использовать возможные проверки:

1. Первую проверку надо произвести после определения опорных реакций. Для этого можно составить сумму моментов всех сил, действующих на раму, относительно какой-либо точки. Эту точку следует выбирать с таким расчетом, чтобы получить наиболее простое выражение  $\sum M$ , но обязательно содержащее моменты найденных реакций. В том случае, когда все опорные реакции, в числе которых нет опорных моментов, найдены из условий равновесия, составленных в виде уравнений моментов, проверку правильности их определения можно осуществить, спроецировав все силы, приложенные к раме, на две непараллельные оси. В случае наличия опорных моментов для контроля правильности определения опорных реакций составление суммы моментов сил относительно произвольной точки обязательно.

2. Следующая проверка должна быть произведена после построения эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$ . В первую очередь рекомендуется убедиться в соответствии друг другу эпюр  $Q$  и  $M$  путем их сопоставления. При этом надо иметь в виду, что для участка, на котором эпюра  $Q$  ограничена прямой, параллельной оси элемента, эпюра  $M$  должна быть ограничена наклонной прямой, а на участке с эпюрой  $Q$ , ограниченной наклонной прямой, эпюра  $M$ , должна быть очерчена по квадратной параболе; участку эпюры  $Q$  с постоянным знаком должен соответствовать участок эпюры  $M$ , на котором касательные к этой эпюре имеют

наклоны к оси элемента в одну и ту же сторону, причем сечению с большим абсолютным значением поперечной силы соответствует больший угол наклона касательной на эпюре М; для сечения в котором поперечная сила равна нулю, касательная к эпюре М должна быть параллельна оси элемента; если в сечениях какого-то участка поперечная сила равна нулю, то эпюра М на нем должна ограничена прямой, параллельной оси элемента.

3. Убедившись в соответствии эпюр Q и M по внешним признакам, можно перейти к проверке условий равновесия выделяемых из рамы узлов или отдельных произвольных ее частей, в сечениях которых должны быть приложены внутренние усилия Q, M и N.

### Пример 1

Для заданной рамы (рис. 4.1,а) построить эпюры Q, M и N и проверить правильность их построения.

#### Решение:

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = -V_A \cdot l + q \cdot h \cdot h/2 - P \cdot l/2 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{0,5qh^2 - 0,5Pl}{l} = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 8^2 - 0,5 \cdot 60 \cdot 6}{6} = 23,33 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot l + q \cdot h \cdot h/2 + P \cdot l/2 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{0,5qh^2 + 0,5Pl}{l} = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 8^2 + 0,5 \cdot 60 \cdot 6}{6} = 83,33 \text{ кН};$$

Реакцию  $H_A$  найдём из уравнения проекций сил, прилагаемых к раме, на горизонтальную ось X:

$$\sum X = -H_A + qh = 0, \text{ откуда } H_A = qh = 10 \cdot 8 = 80 \text{ кН.}$$

Все найденные реакции положительные, следовательно, их направление на рис.1 выбрано правильно.

Для проверки правильности определения опорных реакций составим сумму проекций всех сил, действующих на раму, на ось Y:

$$\sum Y = V_B - V_A - P = 83,33 - 23,33 - 60 = 0.$$

Так как в результате получен нуль, то это даёт основание полагать, что реакции найдены правильно.

2. Построение эпюр.

Данная рама состоит из четырёх участков AC, CD, BE и DE (рис. 4.1а). Соответственно этим участкам показаны произвольно выбранные сечения 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 и указаны  $x_1, x_2, x_3, x_4$  - абсциссы этих сечений относительно начала каждого участка (точки А, С, Е и В).

а) Эпюра Q.

Стойка AC.

Рассмотрим часть рамы, расположенной ниже сечения 1-1:

$$Q_1 = H_A - qx_1; \quad 0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м};$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q_1 = H_A = 80 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_1 = 8 \text{ м} \quad Q_1 = H_A - qh = 80 - 10 \cdot 8 = 0.$$

Ригель на участке CD.

Рассмотрим левую часть рамы, расположенную между сечением 2-2 и опорой А.

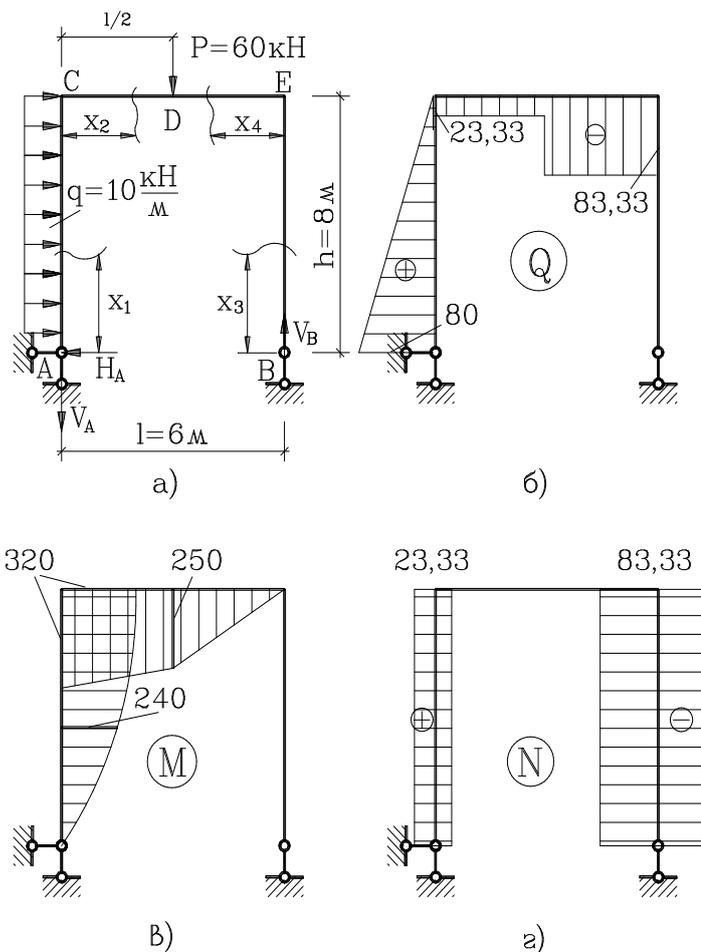


Рис. 4.1

$$Q_2 = -V_A = -23,33 \text{ кН}; \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м},$$

т.е. величина, не зависящая от  $x_2$  и, постоянная по всей длине участка CD.

Стойка BE.

Рассмотрим часть рамы, расположенную ниже сечения 3-3.

$$Q_3 = 0; \quad 0 \leq x_3 \leq 8 \text{ м},$$

т.е. поперечные силы в сечении стойки BE отсутствуют.

Ригель на участке DE.

Рассмотрим правую часть рамы, расположенную между сечением 4-4 и опорой B.

$$Q_4 = -V_B = -83,33 \text{ кН}; \quad 0 \leq x_4 \leq 3 \text{ м},$$

По вычисленным значениям поперечных сил строим эпюру Q. Ординаты эпюры откладываем перпендикулярно осям элементов рам (рис. 4.1б).

б) Эпюра M.

Стойка AC.

$$M_1 = H_A x_1 - q x_1^2 / 2; \quad 0 \leq x_1 \leq 8 \text{ м};$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 4 \text{ м} \quad M_1 = 80 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 240 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_1 = 8 \text{ м} \quad M_1 = 80 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 320 \text{ кНм}.$$

Ригель на участке CD.

$$M_2 = -V_A x_2 + H_A h - q h^2 / 2; \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \text{ м};$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad M_2 = -23,33 \cdot 0 + 80 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 320 \text{ кНм};$$

при  $x_2=3$  м  $M_2=-23,33 \cdot 3+80 \cdot 8-5 \cdot 8^2=250$  кНм.

Стойка BE.

$M_3=0;$   $0 \leq x_3 \leq 8$  м;

т.к. на рассматриваемую часть рамы действует одна сила  $V_B$ , причём направленная вдоль оси стержня.

Ригель на участке DE.

$M_4=V_B x_4;$   $0 \leq x_4 \leq 3$  м;

при  $x_4=3$  м  $M_4=83,33 \cdot 3=250$  кНм.

Эпюра  $M$  приведена на рис.1,в.

в) Эпюра  $N$ .

Стойка AC.

$N_1=V_A=23,33$  кН;

Знак плюс показывает, что стойка работает на растяжение.

Ригель на участке CD.

$N_2=N_A-ql=80-10 \cdot 8=0$ .

Стойка BE.

$N_3=-V_B=-83,33$  кН.

Ригель на участке DE.

$N_4=0$ .

Эпюра  $N$  показана на рис.4.1г.

3. Проверка правильности построения эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$ . Проверим равновесие выделенных из рамы узлов  $C$  и  $E$  (рис. 4.2а,б).

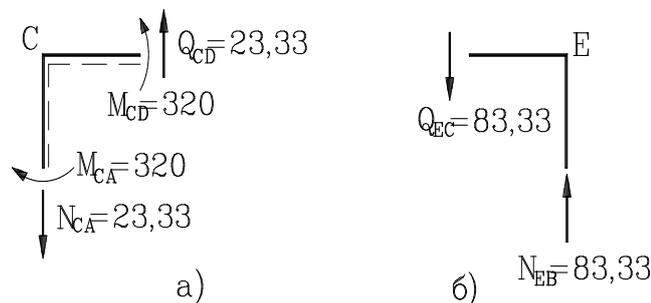


Рис. 4.2

В сечениях приложим внутренние усилия, заменяющие действие отброшенных частей рамы на узел  $C$ . Внутренние усилия берём с эпюр  $M$ ,  $Q$  и  $N$ . Для равновесия узла должны соблюдаться условия:  $\sum X=0$ ;  $\sum Y=0$ ;  $\sum M_C=0$ .

Проверим, соблюдаются ли данные условия.

$\sum X=0$ ;

$\sum Y=Q_{CD}-N_{CA}=23,33-23,33=0$ ;

$\sum M_C= M_{CA}- M_{CD}=320-320=0$ .

Узел находится в равновесии.

Проверим равновесие узла  $E$ .

$\sum X=0$ ;

$\sum Y=N_{EB}-Q_{EC}=83,33-83,33=0$ ;

$\sum M_E=0$ .

Итак, внешнее соответствие эпюр  $Q$ ,  $M$  и  $N$  и соблюдение условия равновесия вырезанных узлов дают основание полагать, что проверяемые эпюры построены правильно.

## Пример 2

Для заданной трехшарнирной рамы (рис.4.3а) построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

**Решение:**

1. Вначале определяем опорные реакции (рис.4.3,а)

$$\sum M_B = V_A \cdot 2L + q \cdot h \cdot (h/2 + 2h) - P_2 \cdot L + m - P_1 \cdot h = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{P_2 L + P_1 h - 2,5qh^2 - m}{2L} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 2,5 \cdot 2 \cdot 2^2 - 8}{8} = 1,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 2L + q \cdot h \cdot (h/2 + 2h) + P_2 \cdot L + m - P_1 \cdot h = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{2,5qh^2 + P_2 L + m - P_1 h}{2L} = \frac{2,5 \cdot 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 4 + 8 - 4 \cdot 2}{8} = 6,5 \text{ кН};$$

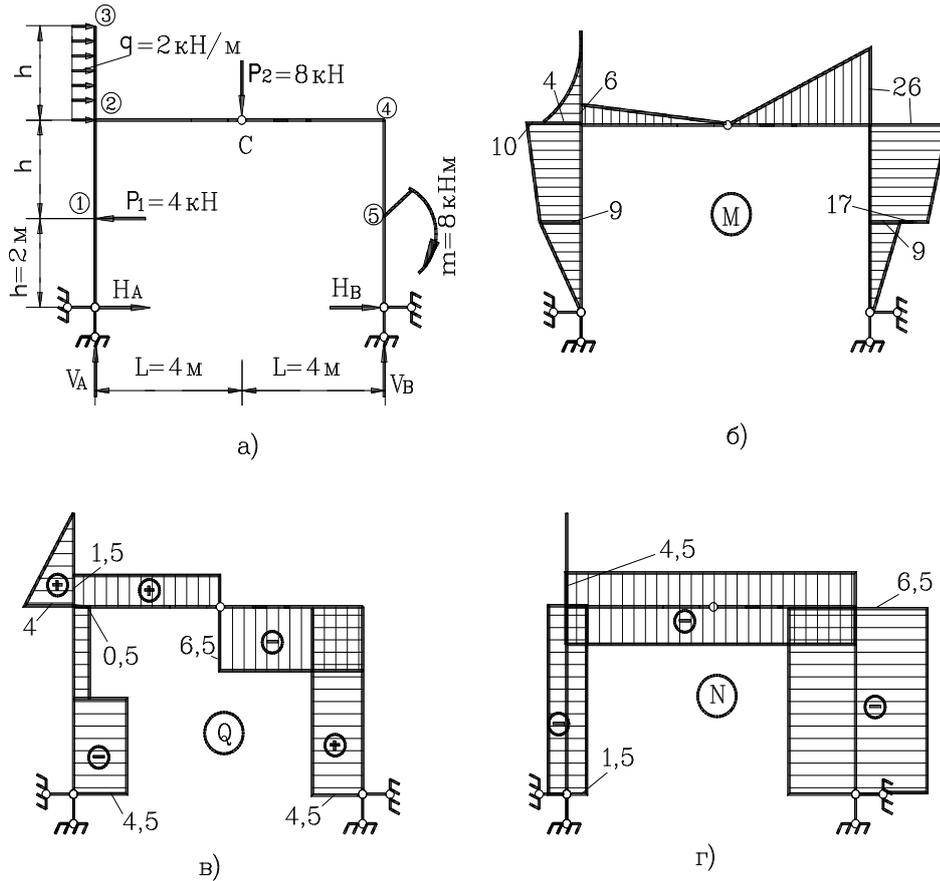


Рис.4.3.

$$\sum M_c^{лев} = V_A \cdot L + q \cdot h \cdot h/2 + P_1 \cdot h - H_A \cdot 2h = 0,$$

$$\text{Откуда } H_A = \frac{qh^2 / 2 + V_A \cdot L + P_1 h}{2h} = \frac{2 \cdot 2^2 / 2 + 1,5 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{4} = 4,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_c^{пр} = -V_B \cdot L + m + H_B \cdot 2h = 0,$$

$$\text{Откуда } H_B = \frac{V_B \cdot L - m}{2h} = \frac{6,5 \cdot 4 - 8}{4} = 4,5 \text{ кН};$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим сумму проекций всех сил, действующих на раму, на оси X и Y:

$$\sum X = H_A - H_B - P_1 + qh = 4,5 - 4,5 - 4 + 2 \cdot 2 = 0,$$

$$\sum Y = V_B + V_A - P_2 = 1,5 + 6,5 - 8 = 0.$$

2. Определяем величины изгибающих моментов в характерных сечениях и строим эпюру изгибающих моментов (рис.4.3,б)

$$\begin{aligned}
 M_A &= 0, & M_{1A} &= -H_A \cdot h = -4,5 \cdot 2 = -9 \text{ кНм}, \\
 M_{2A} &= -H_A \cdot 2h + P_1 \cdot h = -4,5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = -10 \text{ кНм}, & M_{23} &= -q \cdot h^2 / 2 = -2 \cdot 2^2 / 2 = -4 \\
 &\text{кНм}, & & \\
 M_{32} &= 0, & & \\
 M_{2C} &= -H_A \cdot 2h + P_1 \cdot h + q \cdot h^2 / 2 = -4,5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 = -6 \text{ кНм}, & M_{4C} &= -H_B \cdot 2h - m = -4,5 \cdot 4 - 8 = - \\
 M_C &= 0, & & \\
 &26 \text{ кНм}, & & \\
 M_{4B} &= H_B \cdot 2h + m = 4,5 \cdot 4 + 8 = 26 \text{ кНм}, & M_{54} &= H_B \cdot h + m = 4,5 \cdot 2 + 8 = \\
 &17 \text{ кНм}, & & \\
 M_{5B} &= H_B \cdot h = 4,5 \cdot 2 = 9 \text{ кНм}, & M_B &= 0. \\
 &\text{Для проверки вырезаем узлы 2, 4 и 5 (рис.4.4):} & &
 \end{aligned}$$

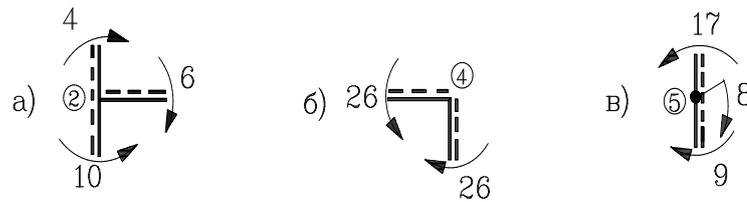


Рис.4.4

3. Строим эпюру поперечных сил, используя зависимость  $Q=dM/dX$  (рис.4.3в) .

$$\begin{aligned}
 Q_{A1} &= Q_{1A} = (M_{1A} - M_A) / h = (-9 - 0) / 2 = -4,5 \text{ кН}, \\
 Q_{12} &= Q_{21} = (M_{21} - M_{12}) / h = (-10 - (-9)) / 2 = -0,5 \text{ кН}, \\
 Q_{23} &= q \cdot h = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}, \\
 Q_{32} &= 0, \\
 Q_{2C} &= Q_{C2} = (M_C - M_{2C}) / L = (0 + 6) / 4 = 1,5 \text{ кН}, \\
 Q_{3C} &= Q_{C3} = (M_{3C} - M_C) / L = (-26 - 0) / 4 = -6,5 \text{ кН}, \\
 Q_{45} &= Q_{54} = (M_{45} - M_{54}) / h = (26 - 17) / 2 = 4,5 \text{ кН}, \\
 Q_{5B} &= Q_{B5} = (M_{5B} - M_B) / h = (9 - 0) / 2 = 4,5 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

4. После построения эпюры  $Q$ , вырезая узлы (рис.4.5а и б), строим эпюру нормальных сил (рис.4.3г).

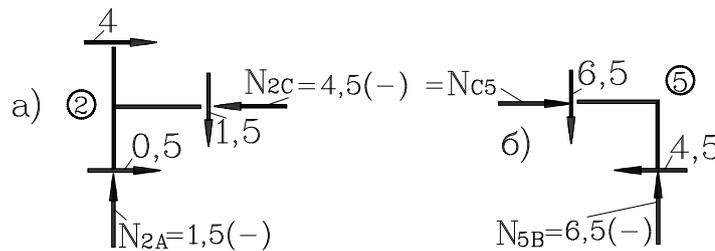


Рис.4.5

### Пример 3

Построить эпюры  $M, Q$  и  $N$  в трехшарнирной раме с затяжкой, изображенной на рис.4.6а.

1. Определяем опорные реакции и усилие в затяжке.

$$\sum M_B = V_A \cdot 2L + q \cdot 2h \cdot h - P_1 \cdot L - m - P_2 \cdot h / 2 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{P_1 \cdot L + P_2 \cdot h / 2 + m - 2qh^2}{2L} = \frac{4 \cdot 4 + 10 \cdot 1 + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2^2}{8} = 2,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -V_B \cdot 2L + q \cdot 2h^2 + P_1 \cdot L - P_2 \cdot h/2 - m = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{2qh^2 + P_1L - m - P_2h/2}{2L} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 4 - 8 - 10 \cdot 1}{8} = 1,75 \text{ кН};$$

$$\sum X = 2qh - P_2 + H_B = 0, H_B = P_2 - 2qh = 10 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

$$\sum M_C^{\text{сп}} = -N_3 \cdot h - m - H_B \cdot 2h + P_2 \cdot 1,5h = 0,$$

$$\text{откуда } N_3 = \frac{P_2 \cdot 1,5h - H_B \cdot 2h - m}{h} = \frac{10 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 8}{2} = 7 \text{ кН};$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнения равновесия вида:

$$\sum Y = V_B + V_A - P_1 = 1,75 + 2,25 - 4 = 0.$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = V_A \cdot 2L - q \cdot 2h^2 - P_1 \cdot L + N_3 \cdot h = 2,25 \cdot 8 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 7 \cdot 2 = 0.$$

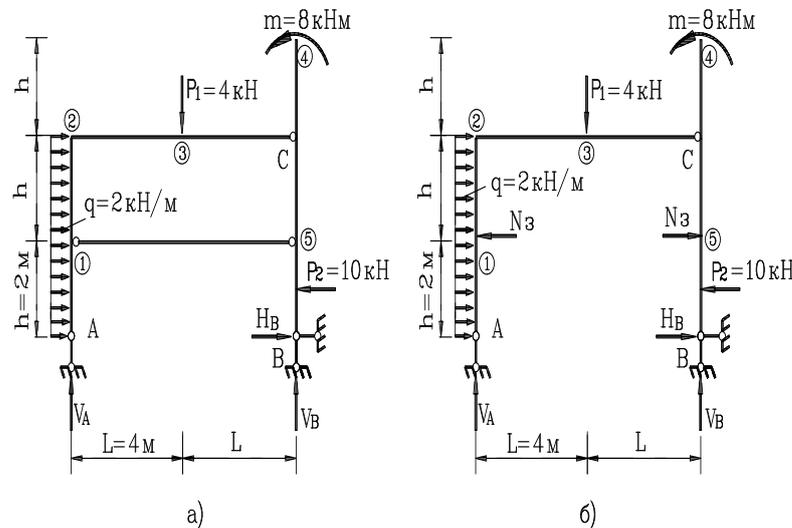


Рис. 4.6

2. Определяем величины изгибающих моментов в характерных сечениях и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 4.7, а)

$$M_A = 0,$$

$$M_{1A} = -q \cdot h^2/2 = -2 \cdot 2^2/2 = -4 \text{ кНм},$$

$$M_{2A} = -q \cdot 2h^2 + N_3 \cdot h = -2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 = -2 \text{ кНм},$$

$$M_{23} = -q \cdot 2h^2 + N_3 \cdot h = -2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 = -2 \text{ кНм},$$

$$M_{32} = V_A \cdot L - q \cdot 2h^2 + N_3 \cdot h = 2,25 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 = 7 \text{ кНм},$$

$$M_C = 0,$$

$$M_{4C} = m = 8 \text{ кНм},$$

$$M_{C4} = m = 8 \text{ кНм},$$

$$M_{CB} = -H_B \cdot 2h - N_3 \cdot h + P_2 \cdot 1,5h = -2 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 8 \text{ кНм},$$

$$M_{5B} = -H_B \cdot h + P_2 \cdot 0,5h = -2 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 6 \text{ кНм},$$

$$M_{6B} = -H_B \cdot h/2 = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кНм},$$

$$M_B = 0.$$

Для проверки вырезаем узлы 1, 2, C и 5 (рис. 4.7 б):

3. Строим эпюру поперечных сил (рис. 6 в), используя зависимость  $Q = dM/dx$ .

$$Q_{A1} = qh/2 + (M_{1A} - M_A)/h = 2 \cdot 2/2 + (-4 - 0)/2 = 2 - 2 = 0,$$

$$Q_{1A} = -qh/2 + (M_{1A} - M_A)/h = -2 \cdot 2/2 + (-4 - 0)/2 = -2 - 2 = -4 \text{ кН},$$

$$Q_{12} = qh/2 + (M_{21} - M_{12})/h = 2 \cdot 2/2 + (-2 + 4)/2 = 2 + 1 = 3 \text{ кН},$$

$$Q_{21} = -qh/2 + (M_{21} - M_{12})/h = -2 \cdot 2/2 + (-2 + 4)/2 = -2 + 1 = -1 \text{ кН},$$

$$Q_{23} = Q_{32} = (M_{32} - M_{23})/L = (7 - (-2))/4 = 2,25 \text{ кН},$$

$$Q_{4C} = Q_{C4} = (M_{4C} - M_{C4})/h = (8 - 8)/2 = 0,$$

$$Q_{C5} = Q_{5C} = (M_{C5} - M_{5C})/h = (8 - 6)/2 = 1 \text{ кН},$$

$$Q_{56} = Q_{65} = (M_{56} - M_{65})/0,5L = (6 + 2)/1 = 8 \text{ кН},$$

$$Q_{6B} = Q_{B6} = (M_{6B} - M_B)/0,5h = (-2 - 0)/1 = -2 \text{ кН}.$$

Найдем  $M_{\min}$  на участке 1-2; для этого предварительно найдем  $X_0 = Q_{12}/q = 3/2 = 1,5 \text{ м}$ ;

$$M_{\min} = -q(h + X_0)^2/2 + N_3 \cdot h = -2(2 + 1,5)^2/2 + 7 \cdot 2 = -1,75 \text{ кНм}.$$

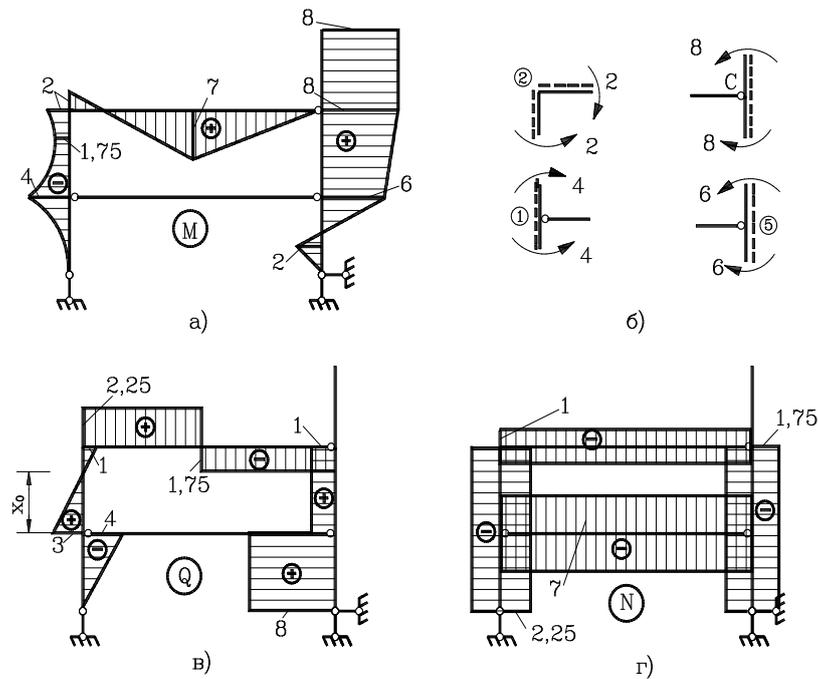


Рис.4.7

4. После построения эпюры  $Q$ , вырезая узлы (рис.4.8), строим эпюру нормальных сил (рис.4.7г).

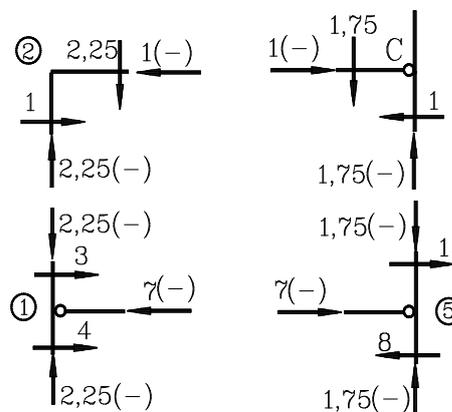


Рис.4.8