



ЗАДАЧА 2. Расчет трехшарнирной арки

Методические указания

На схему надо нанести все заданные размеры и нагрузку. Ординаты точек оси арки и углы наклона касательных определяются по следующим уравнениям:

а) при очертании оси по параболе 1

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f(l-2x)}{l^2};$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi;$$

б) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - (l/2 - x)^2} - R + f; R = ((l/2)^2 + f^2)/2f;$$

$$\sin \varphi = (l - 2x)/2R; \cos \varphi = (y + R - f)/R;$$

Следует помнить, что для правой половины арки угол наклона отрицателен.

Вычисление значений опорных реакций, моментов, поперечных и продольных сил в заданных точках надо иллюстрировать необходимыми формулами. При проверке правильности построения эпюр M , Q и N необходимо убедиться в соблюдении следующих зависимостей между их очертаниями:

а) в том сечении арки, где приложена сосредоточенная сила P , а в трехшарнирной арке с затяжкой и в сечениях, соответствующих местам присоединения к ней затяжки, на эпюре Q возникают скачки h_q .

Каждый из этих скачков по величине определяется суммой или разностью абсолютных значений ординат эпюры Q , расположенных бесконечно близко к рассматриваемому сечению слева и справа от него; при этом должны выполняться следующие равенства:

в месте приложения сосредоточенной силы

$$h_q = P \cos \varphi;$$

в месте присоединения к арке затяжки

$$h_q = N_3 |\sin \varphi|.$$

На эпюре N в тех же сечениях (за исключением соответствующего промежуточному шарниру) возникают скачки h_N , каждый из которых по величине определяется арифметической разностью ординат эпюры N , расположенных бесконечно близко к рассматриваемому сечению слева и справа от него; при этом должны выполняться следующие равенства:

в местах приложения сосредоточенной силы

$$h_N = P |\sin \varphi|;$$

в местах присоединения к арке затяжки

$$h_N = N_3 \cos \varphi.$$

На эпюре M в указанных сечениях возникают переломы:

б) в сечениях, где поперечная сила равна нулю, изгибающие моменты достигают экстремальных значений - максимума или минимума;

с) в сечениях, соответствующих центрам пятых и промежуточного шарниров, изгибающие моменты должны быть равны нулю;

если при перемещении вдоль базовой линии эпюры слева направо ординаты эпюры Q имеют положительные значения, то ординаты эпюры M возрастают, и наоборот: если ординаты эпюры Q имеют отрицательные значения, то ординаты эпюры M убывают.

д) если при перемещении вдоль базовой линии эпюры слева направо ординаты эпюры Q имеют положительные значения, то ординаты эпюры M возрастают, и наоборот: если ординаты эпюры Q имеют отрицательные значения, то ординаты эпюры M убывают

Пример

Для сплошной трехшарнирной арки (рис.2.1а) требуется: а) построить эпюры внутренних усилий M, Q и N; б) построить линии влияния внутренних усилий M, Q и N для двух указанных сечений арки и по ним найти значения M, Q и N от той же нагрузки

Решение:

1. Определяем степень статической неопределимости:

$$n=3K-Ш,$$

где K- число замкнутых контуров, K=1,

Ш - количество шарниров, Ш=3,

$$n=3 \cdot 1 - 3 = 0.$$

Трёхшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой.

2. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = V_B \cdot 40 - q \cdot 20 \cdot 10 - P \cdot 30 = 0;$$

$$V_B = \frac{400 + 360}{40} = \frac{760}{40} = 19 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 40 - q \cdot 20 \cdot 30 - P \cdot 10 = 0;$$

$$V_A = \frac{1200 + 120}{40} = \frac{1320}{40} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = -P \cdot 10 + V_B \cdot 20 - H_B \cdot 5 = 0;$$

$$H_B = \frac{-120 + 380}{5} = \frac{260}{5} = 52 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = q \cdot 20 \cdot 10 - V_A \cdot 20 + H_A \cdot 5 = 0;$$

$$H_A = \frac{-400 + 600}{5} = 52 \text{ кН}.$$

Проводим проверку правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = -q \cdot 20 - P + V_A + V_B = -40 - 12 + 19 + 33 = 0;$$

$$\sum X = H_A - H_B = 52 - 52 = 0 \quad \text{- опорные реакции определены правильно.}$$

4. Проводим оси координат. За начало координат принимаем точку A, ось X направляем вправо, ось Y - вверх. Арку разбиваем на восемь частей с проекциями оси, равными 5 м (рис.2.1а).

5. Определяем координаты оси арки. Для арки, очерченной по параболе координата y определяется по формуле:

$$y = \frac{4f}{l^2} (l - x) \cdot x,$$

где f=5 м - стрела подъема арки;

l=40 м - пролёт;

x - абсцисса сечения;

$$y = \frac{4 \cdot 5}{40^2} (40 - x) \cdot x = \frac{40 - x}{80} x.$$

Находим значения $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ для 9 сечений арки (φ - угол наклона касательной к оси арки):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 5}{40^2} (40 - 2x) = \frac{20 - x}{40};$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}; \quad \sin\varphi = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Результаты сводим в таблицу 1.

6. Определяем балочную поперечную силу Q_x^0 и балочный изгибающий момент M_x^0 , представляющие собой поперечную силу и изгибающий момент в соответствующем сечении простой балки с пролётом и нагрузкой такими же, как для заданной арки (рис.2.1б):

$$\begin{aligned} Q_A^0 &= V_A = 33 \text{ кН}; & M_A^0 &= 0; \\ Q_1^0 &= V_A - q \cdot 5 = 33 - 10 = 23 \text{ кН}; & M_1^0 &= V_A \cdot 5 - q \cdot 5^2 / 2 = 140 \text{ кНм}; \\ Q_2^0 &= V_A - q \cdot 10 = 33 - 20 = 13 \text{ кН}; & M_2^0 &= V_A \cdot 10 - q \cdot 10^2 / 2 = 250 \text{ кНм}; \\ Q_3^0 &= V_A - q \cdot 15 = 33 - 30 = 3 \text{ кН}; & M_3^0 &= V_A \cdot 15 - q \cdot 15^2 / 2 = 270 \text{ кНм}; \\ Q_C^0 &= V_A - q \cdot 20 = 33 - 40 = -7 \text{ кН}; & M_C^0 &= V_A \cdot 20 - q \cdot 20^2 / 2 = 260 \text{ кНм}; \\ Q_B^0 &= -V_B = -19 \text{ кН}; & M_B^0 &= 0; \\ Q_6^0 &= -V_B = -19 \text{ кН}; & M_6^0 &= V_B \cdot 5 = 95 \text{ кНм}; \\ Q_5^{0\text{np}} &= -V_B = -19 \text{ кН}; & M_5^0 &= V_B \cdot 10 = 190 \text{ кНм}; \\ Q_5^{0\text{лев}} &= -V_B + P = -19 + 12 = -7 \text{ кН}; & M_4^0 &= V_B \cdot 15 - P \cdot 5 = 225 \text{ кНм}; \\ Q_4^0 &= -V_B + P = -19 + 12 = -7 \text{ кН}; & M_C^0 &= V_B \cdot 20 - P \cdot 10 = 260 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

7. Определяем внутренние усилия в сечениях арки по формулам:

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y_x;$$

$$Q_x = Q_x^0 \cdot \cos\varphi_x - H \cdot \sin\varphi_x;$$

$$N_x = Q_x^0 \cdot \sin\varphi_x + H \cdot \cos\varphi_x.$$

Для арки сжимающее усилие условно считаем положительным.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

№ сеч	координ. сечения		$\operatorname{tg}\varphi_x$	$\cos\varphi_x$	$\sin\varphi_x$	Q_x^0	M_x^0	Hy	M_x	$Q_x^0 \cdot \cos\varphi_x$	H · $\sin\varphi_x$	Q_x	$Q_x^0 \cdot \sin\varphi_x$	H · $\cos\varphi_x$	N_x
	x	y													
A	0	0	0,5	0,894	0,447	33	0	0	0	29,52	23,25	6,26	14,76	46,51	61,27
1	5	2,188	0,375	0,936	0,351	23	140	113,8	26,25	21,53	18,26	3,278	8,075	48,69	56,76
2	10	3,75	0,25	0,97	0,243	13	250	195	55	12,61	12,61	0,001	3,153	50,45	53,60
3	15	4,69	0,125	0,992	0,124	3	270	243,8	26,25	2,98	6,45	-3,47	0,37	51,6	51,97
C	20	5	0	1	0	-7	260	260	0	-7	0	-7	0	52	52
4	25	4,69	-0,125	0,992	-0,124	-7	225	243,8	-18,8	-6,95	-6,45	-0,49	0,87	51,59	52,47
5	30	3,75	-0,25	0,97	-0,243	$\frac{-7}{-19}$	190	195	-5	$\frac{-6,79}{-18,43}$	-12,6	$\frac{5,82}{-5,82}$	$\frac{1,7}{4,61}$	$\frac{50,45}{48,68}$	$\frac{52,14}{55,05}$

6	35	2,19	-0,375	0,936	-0,351	-19	95	113,8	-18,75	-17,79	-18,26	0,468	6,671	48,69	55,36
B	40	0	-0,5	0,894	-0,447	-19	0	0	0	-16,99	23,25	6,261	8,497	46,51	55,01

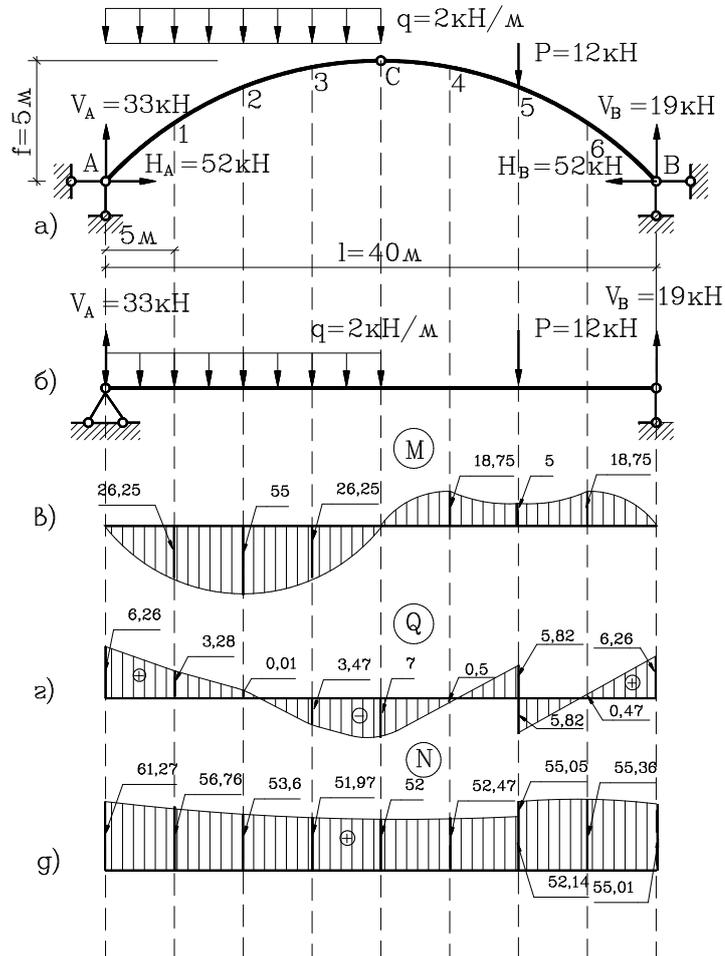


Рис. 2.1

8. Далее по табличным данным строим эпюры M, Q и N (рис.2.1в,г,д).

9. Построение линий влияния изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в сечениях 2 и 6.

Сечение 2.

1. Линия влияния изгибающего момента M_2 (рис.2.2б) Расстояние U_m от левой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_m = \frac{2 \cdot f}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot f}{y_2 / x_2 + 2 \cdot f / L} = \frac{2 \cdot 5}{3,75 / 10 + 2 \cdot 5 / 40} = 16 \text{ м}$$

Изгибающий момент в сечении 2

$$M_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2) - P \cdot y_2 = q \cdot [1/2 \cdot U_m \cdot y_1 - 1/2 \cdot (L/2 - U_m) \cdot y_c] - P \cdot y_2 = 2 \cdot [1/2 \cdot 16 \cdot 3,75 - 1/2 \cdot (20 - 16) \cdot 2,5] - 12 \cdot 1,25 = 35 \text{ кНм}$$

Примечание: Ординаты y_1, y_2 и y_c найдены из подобия треугольников.

2. Линия влияния поперечной силы Q_2 (рис.2.2в). Расстояние U_q от левой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_q = \frac{2 \cdot f}{\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot 5}{0,25 + 0,25} = 20 \text{ м}$$

Поперечная сила в сечении 2

$$Q_2 = q \cdot (\omega_1 - \omega_2) = 0, \text{ т.к. } \omega_1 = \omega_2.$$

3. Линия влияния продольной силы N_2 (рис.2.2г). Расстояние U_n от левой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_n = \frac{2 \cdot f}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot f}{1 / \operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot 5}{4 - 0,25} = 2,667 \text{ м}$$

Продольная сила в сечении 2

$$\begin{aligned} N_2 &= -q \cdot (\omega_1 + \omega_2) - P \cdot y_3 = -q \cdot [1/2 \cdot x_2 \cdot y_1 + 1/2 \cdot (y_c + y_2) \cdot (L/2 - x_2)] - P \cdot y_3 = \\ &= -2 \cdot [1/2 \cdot 10 \cdot 0,911 + 1/2 \cdot (2,065 + 1,154) \cdot 10] - 12 \cdot 1,036 = -53,69 \text{ кН.} \end{aligned}$$

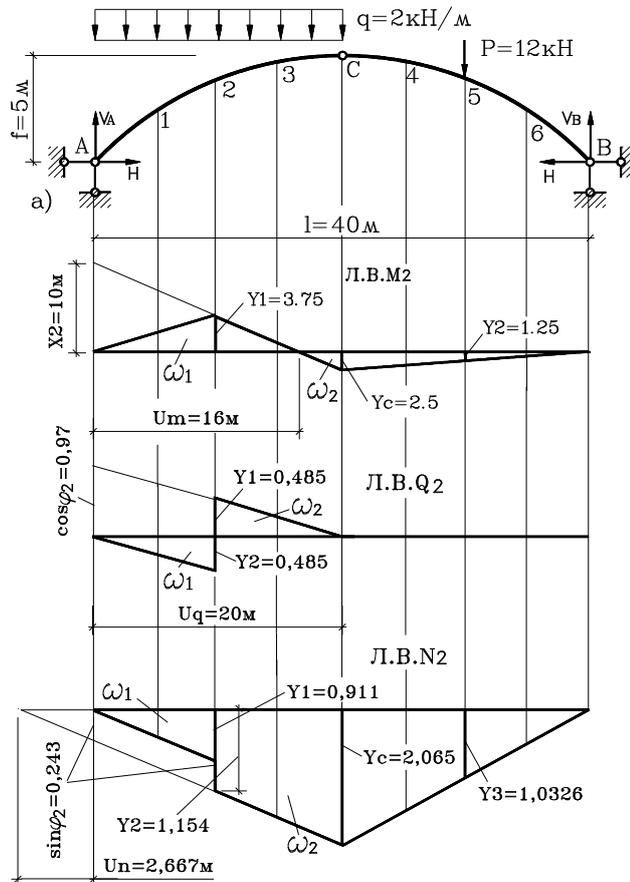


Рис. 2.2

Сечение 6.

1. Линия влияния изгибающего момента M_6 (рис.2.3б). Расстояние U_m от правой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_m = \frac{2 \cdot f}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot f}{y_6 / (L - x_6) + 2 \cdot f / L} = \frac{2 \cdot 5}{2,19 / 5 + 2 \cdot 5 / 40} = 14,535 \text{ м}$$

Изгибающий момент в сечении 6

$$M_6 = -q \cdot \omega_1 + P \cdot y_1 = -q \cdot 1/2 \cdot L/2 \cdot y_c + P \cdot y_1 = -2 \cdot 1/2 \cdot 20 \cdot 1,88 + 12 \cdot 1,56 = 35 \text{ кНм.}$$

2. Линия влияния поперечной силы Q_6 (рис.2.3в). Расстояние U_q от правой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_q = \frac{2 \cdot f}{|tg \varphi_6| + tg \beta} = \frac{2 \cdot 5}{0,375 + 0,25} = 16 м$$

Поперечная сила в сечении 6

$$Q_2 = q \cdot \omega_1 - P \cdot y_1 = q \cdot 1/2 \cdot L/2 \cdot y_c - P \cdot y_1 = 2 \cdot 1/2 \cdot 20 \cdot 0,234 - 12 \cdot 0,351 = 0,468 \text{ кН.}$$

3. Линия влияния продольной силы N_6 (рис.2.3г). Расстояние U_n от правой опоры до нулевой точки для симметричных арок, будет равно:

$$U_n = \frac{2 \cdot f}{|ctg \varphi_2| - tg \beta} = \frac{2 \cdot f}{|1 / tg \varphi_2| - tg \beta} = \frac{2 \cdot 5}{2,667 - 0,25} = 4,137 м$$

Продольная сила в сечении 6

$$N_2 = -q \cdot \omega_1 - P \cdot y_1 = -q \cdot 1/2 \cdot L/2 \cdot y_c - P \cdot y_1 = -2 \cdot 1/2 \cdot 20 \cdot 2,0479 - 12 \cdot 1,1944 = - 55,35 \text{ кН.}$$

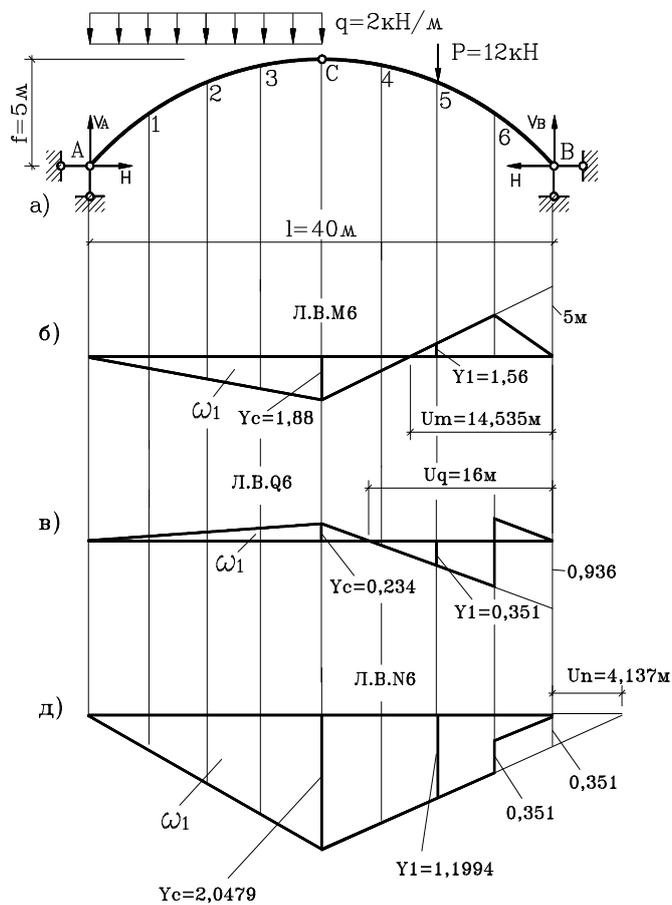


Рис. 2.3