I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛА «ДИНАМИКА»

1. Закон инерции

Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока оно не будет выведено из этого состояния другими телами. Система отсчёта, в которой выполняется закон инерции, называется **инерциальной.** В большинстве задач в качестве инерциальной можно принять систему отсчёта, связанную с Землёй.

2. Основной закон динамики

Ускорение, получаемое точкой под действием силы пропорционально величине этой силы и обратно пропорционально массе точки. Направление ускорения совпадает с направлением силы.

$$\overline{a} = \overline{F} / m \qquad \text{или} \qquad m \cdot \overline{a} = \overline{F}$$

Из формулы видно, что под действием одной и той же силы точка с большей массой получает меньшее ускорение. Свойство тела сохранять состояние своего движения называется ***инертностью.*** Следовательно, тело с большей массой обладает большей инертностью.

3. Закон равенства действия и противодействия

При всяком взаимодействии силы действия и противодействия равны по величине, имеют общую линию действия и направлены в противоположные стороны.

Следует иметь в виду, что силы действия и противодействия не уравновешивают друг друга, поскольку они приложены к разным телам (рис. 1).

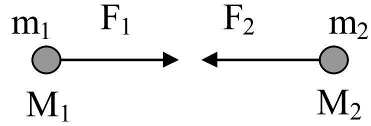

Рис. 1

Пусть на точку M_1 массой m_1 действует сила F_2 со стороны точки M_2, а на точку M_2 массой m_2 действует сила F_1 со стороны точки M_1. Тогда по закону равенства действия и противодействия $F_1 = F_2$, или $m_1 a_1 = m_2 a_2$. Отсюда имеем: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ - ускорения, получаемые точками при их взаимодействии обратно пропорциональны массам точек.

4. Закон независимости действия сил

Ускорение, получаемое точкой под действием системы сил, равно геометрической сумме ускорений, которое она получила бы под действием каждой из сил в отдельности.

Этот закон позволяет записать основной закон динамики для случая, когда на точку действует несколько сил:

$$m \cdot \bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k , \qquad (1)$$

где $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n$, $\bar{a}_i -$ ускорение, получаемое точкой под действием силы $\bar{F}_i$.

5. Основное уравнение динамики в декартовых и естественных осях

Спроектируем уравнение (1) на декартовые оси координат.

$$\begin{cases} ma_x = \sum F_{kx} \\ ma_y = \sum F_{ky} \\ ma_z = \sum F_{kz} \end{cases}, \text{ но } \begin{cases} a_x = \ddot{x} \\ a_y = \ddot{y} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}. \text{ Тогда } \begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz} \end{cases}$$

Это и есть основные уравнения динамики в декартовых осях. Часто эти уравнения называют **дифференциальными уравнениями движения точки.** Если уравнение (1) спроектировать на естественные оси координат ($\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$), то получим

$$\begin{cases} ma_\tau = \sum F_{k\tau} \\ ma_n = \sum F_{kn} \\ ma_b = \sum F_{kb} \end{cases} \text{ но } \begin{cases} a_\tau = dv / dt \\ a_n = v^2 / \rho \\ a_b = 0 \end{cases} \text{ Тогда } \begin{cases} mdv / dt = \sum F_{k\tau} \\ mv^2 / \rho = \sum F_{kn} \\ 0 = \sum F_{kb} \end{cases}$$

Это и есть основные уравнения динамики в естественных осях.

6. Решение первой задачи динамики

Первая задача динамики (прямая) заключается в том, что по известной массе точки и закону её движения требуется определить неизвестную силу, действующую на эту точку.

Очевидно, для решения этой задачи необходимо уметь брать производную.

Последовательность решения задач динамики:

1. Нарисовать чертёж (схему).
2. Приложить к материальной точке активные силы и реакции связей.
3. Показать направление движения точки и выбрать оси координат. Одну из осей необходимо направить по скорости. Если в задаче дан радиус кривизны траектории, или известно, что точка движется по окружности, то это говорит о том, что при решении задачи следует использовать естественные оси координат.
4. Записать основное уравнение динамики в проекции на выбранные оси и определить неизвестные.

7. Решение второй задачи динамики

Вторая задача динамики (обратная) заключается в том, что по известной массе точки и силам, действующим на неё, требуется определить закон движения точки.

Решение этой задачи требует умения решать дифференциальные уравнения.

При решении второй задачи динамики могут встретиться следующие случаи:

1. F = const; **2.** F = f(t); **3.** F = f(v); **4.** F = f(x); **5.** F = f(x;v).

Для решения задачи необходимо один или два раза проинтегрировать уравнения движения точки. В случае прямолинейного движения точки интегрируют одно уравнение, записанное в проекции на ось x, совпадающую с направлением скорости. При этом, если по условию задачи требуется определить время, за которое точка приобретет известную скорость или пройдет известное расстояние, ускорение представляют в виде $a_x = \dfrac{dV_x}{dt}$.

Если по условию задачи требуется определить зависимость пути от скорости или скорости от пройденного расстояния, то бывает удобно представить ускорение в виде $a_x = \dfrac{dV_x}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{V_x dV_x}{dx}$.

8. Дифференциальное уравнение относительного движения точки

Иногда при решении задач бывает удобно рассматривать движение точки по отношению к подвижной системе отсчета. Если точка совершает сложное движение, то по теореме о сложении ускорений абсолютное ускорение есть геометрическая сумма переносного, относительного и Кориолисова ускорения, т.е.

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c \,. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим

$$m \cdot \overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k - m\overline{a}_e - m\overline{a}_c \qquad (3)$$

Обозначим $\overline{F}_e^{(u)} = -m\,\overline{a}_e$, $\overline{F}_c^{(u)} = -m\,\overline{a}_c$. Тогда формула (3) с учетом обозначений примет вид $m \cdot \overline{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k + \overline{F}_e^{(u)} + \overline{F}_c^{(u)}$.

Это и есть дифференциальное уравнение относительного движения точки. Дифференциальное уравнение относительного движения точки ни чем не отличается от основного уравнения динамики, если к силам, действующим на точку, добавить переносную $\overline{F}_e^{(u)}$ и Кориолисову $\overline{F}_c^{(u)}$ силы инерции. Если переносное движение является поступательным, прямолинейным и равномерным, то $\overline{a}_c = 0$ и $\overline{a}_e = 0$. В этом случае дифференциальное уравнение относительного движения будет совпадать с основным уравнением динамики. Это говорит о том, что система отсчёта, двигающаяся относительно неподвижной поступательно, равномерно и прямолинейно, является инерциальной.

9. Свободные колебания

Свободными называются колебания точки, происходящие под действием только восстанавливающей силы. Сила называется восстанавливающей, если она все время стремится вернуть точку в положение равновесия. Примером восстанавливающей силы является сила упругости пружины. Если восстанавливающая сила пропорциональна смещению точки из положения равновесия, то она называется линейной восстанавливающей силой.

Пусть на точку М массой m действует линейная восстанавливающая сила упругости (рис. 2): $F_{упр} = c\Delta$, где с – ***жесткость*** пружины (физический смысл жесткости - это сила, необходимая для деформации пружины на единицу длины), в Н/м; Δ – деформация пружины, м.

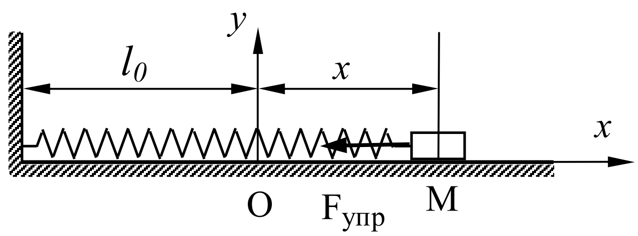

Рис. 2

На рис. 2 l_0 – длина недеформированной пружины. Выбрав начало координат в положении равновесия – т. О, запишем основное уравнение динамики в проекции на ось *x*: $ma_x = -F_{упр}$, или $m\ddot{x} = -cx$.

Отсюда получим

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (4)$$

Выражение (4) – ***это и есть уравнение свободных колебаний точки.*** Здесь $k = \sqrt{c/m}$ называется круговой частотой колебаний (физический смысл: число колебаний за 2π секунд), $с^{-1}$. Общее решение дифференциального уравнения (4) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,. \tag{5}$$

Взяв производную по времени, имеем

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из начальных условий:

при $\quad t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = v_0$. (7)

Подставив (7) в (5) и (6), находим $\quad C_1 = x_0, \quad C_2 = v_0 / k$.

С учетом этого решение (5) принимает вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt\,. \tag{8}$$

Решение (8) можно записать в виде:

$$x = a \sin(kt + \beta), \tag{9}$$

где $a = \sqrt{x_0^2 + (v_0 / k)^2}$ - амплитуда колебаний, м; $\beta = arctg(x_0 k / v_0)$ - начальная фаза колебаний, рад.

Из (9) видно, что свободные колебания являются гармоническими. Период колебаний можно найти по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{m/c}\,. \tag{10}$$

10. Влияние постоянной силы на свободные колебания

Пусть, кроме силы упругости, на точку действует некоторая постоянная сила F (рис. 3). В этом случае основное уравнение динамики примет вид:

$$ma_x = -F_{упр} + F\,. \tag{11}$$

Выбрав начало координат в положении равновесия – т. О, имеем:

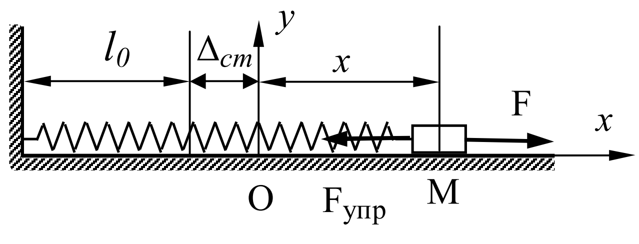

Рис. 3

$F_{упр} = c\Delta = c(x + \Delta_{ст})$, где $\Delta_{ст}$ – статическая деформация пружины под действием силы F.

С учетом этого уравнение (11) примет вид: $m\ddot{x} = -cx - c\Delta_{ст} + F$. Но $F - c\Delta_{ст} = 0$, тогда получим $m\ddot{x} + cx = 0$ или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{12}$$

где $k = \sqrt{c/m}$.

Сравнивая уравнения (4) и (12) видим, что они совпадают. Следовательно, совпадают и их решения. Таким образом, постоянная сила не изменяет характер колебаний точки, она лишь смещает центр колебаний в направлении действия силы на расстояние, равное статической деформации пружины.

По формуле (10): $T = 2\pi\sqrt{m/c}$, учитывая, что $c = F/\Delta_{ст}$, имеем $T = 2\pi\sqrt{m\Delta_{ст}/F}$. Если постоянная сила является силой тяжести, то $F = mg$ и период колебаний можно найти по формуле: $T = 2\pi\sqrt{\Delta_{ст}/g}$.

11. Замена системы упругих элементов одним – эквивалентным

Упругий элемент называется эквивалентным данной системе упругих элементов, если под действием одной и той же силы перемещения ее точки приложения совпадают.

а) ***Параллельное*** соединение упругих элементов с жесткостями c_1 и c_2 изображено на рис. 4 слева.

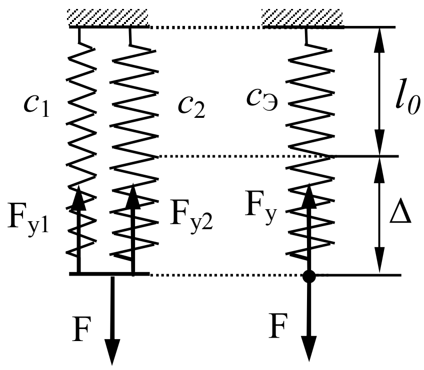

Рис. 4

В положении равновесия сила F уравновешивается двумя силами $F_{у1} = c_1\,\Delta$ и $F_{у2} = c_2\,\Delta$.

$$F = F_{у1} + F_{у2} = c_1\,\Delta + c_2\,\Delta = \Delta(c_1 + c_2). \tag{13}$$

У эквивалентного данной системе упругого элемента (рис. 4 справа) с жесткостью $c_э$ сила F уравновешивается одной силой

$$F = F_у = c_э\,\Delta\,. \tag{14}$$

Приравняв правые части формул (13) и (14), получим: $c_э = c_1 + c_2$.

Из этой формулы видно, что в случае параллельного соединения упругих элементов жесткость эквивалентного упругого элемента больше жесткости любого из них.

б) ***Последовательное*** соединение упругих элементов с жесткостями c_1 и c_2 изображено на рис. 5 слева.

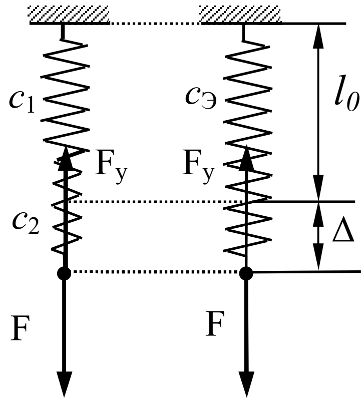

Рис. 5

Каждый из упругих элементов под действием силы F получит деформацию растяжения $\Delta_1 = F/\ c_1$ и $\Delta_2 = F/\ c_2$. Деформация эквивалентного упругого элемента под действием силы F равна $\Delta = F/c_Э$. Жесткость эквивалентного упругого элемента найдем из условия равенства деформаций: $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, тогда $F/\ c_Э = F/\ c_1 + F/\ c_2$. После несложных преобразований найдем

$$c_Э = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} \tag{15}$$

Из (15) видно, что в случае последовательного соединения упругих элементов жесткость эквивалентного упругого элемента меньше жесткости любого из них.

12. Затухающие колебания

В реальных условиях материальная точка, совершающая колебания, испытывает сопротивление движению, поэтому кроме восстанавливающей силы на нее действует сила сопротивления среды, направленная в сторону противоположную движению материальной точки (рис. 6).

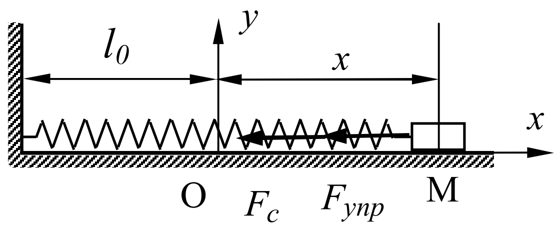

Рис. 6

Сопротивление воздуха при малых скоростях движения пропорционально первой степени скорости: $\overline{F}_c = -\alpha\overline{V}$. Выбрав начало координат в положении равновесия – т. O, запишем основное уравнение динамики в проекции на ось x: $ma_x = -F_{упр} - F_c$ или $m\ddot{x} = -c\,x - \alpha\,\dot{x}$. Отсюда получим

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0 \tag{16}$$

– это уравнение описывает движение точки под действием восстанавливающей силы с учетом сопротивления среды. Здесь обозначено $k = \sqrt{c/m}$, $2n = \alpha/m$. Найдем корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, соответствующего уравнению (16):

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,. \tag{17}$$

Если $n < k$ (***случай малого сопротивления среды***), то корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}$ являются комплексно-сопряженными, и решение уравнения (16) имеет вид:

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)\,. \tag{18}$$

В решении (18) обозначено: $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$.

Взяв производную по времени от (18), и использовав начальные условия, можно определить постоянные интегрирования C_1 и C_2.

Решение (18) можно записать в виде: $x = ae^{-nt}\sin(kt + \beta)$. (19)

График функции (19) показан на рис. 7.

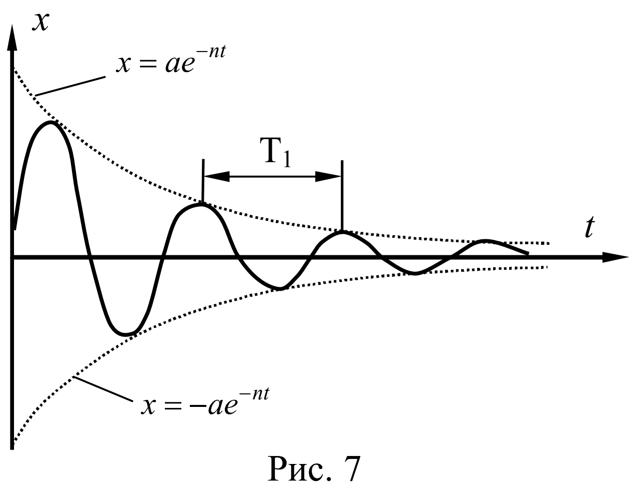

Рис. 7

Из графика видно, что движение точки в этом случае носит колебательный характер. При этом максимальные отклонения точки от положения равновесия с течением времени убывают по экспоненте. ***Такие колебания называются затухающими.*** Функция (19) не является периодической, тем не менее, ***периодом колебаний*** в этом случае называют промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями точки от положения равновесия в одну сторону. Его можно найти по формуле

$$T_1 = 2\pi / k_1 = 2\pi / \sqrt{k^2 - n^2} = \frac{2\pi / k}{\sqrt{1 - (n/k)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - (n/k)^2}}, \tag{20}$$

где T – период соответствующих свободных колебаний. Из формулы (20) видно, что $T_1 > T$. Скорость убывания амплитуды колебаний характеризует коэффициент, называемый ***декрементом*** колебаний: e^{nT_1}. Этот коэффициент показывает, во сколько раз уменьшается максимальное отклонение точки от положения равновесия за один период.

13. Случай апериодического движения (n > k)

Если $n > k$ (***случай большого сопротивления среды***), то корни характеристического уравнения (17) $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ являются действительными и отрицательными. Решение уравнения (16) в этом случае имеет вид:

$$x = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t}. \tag{21}$$

Взяв производную по времени от (21) и использовав начальные условия, можно определить постоянные интегрирования C_1 и C_2.

Сценарии развития событий в этом случае показаны на рис. 8.

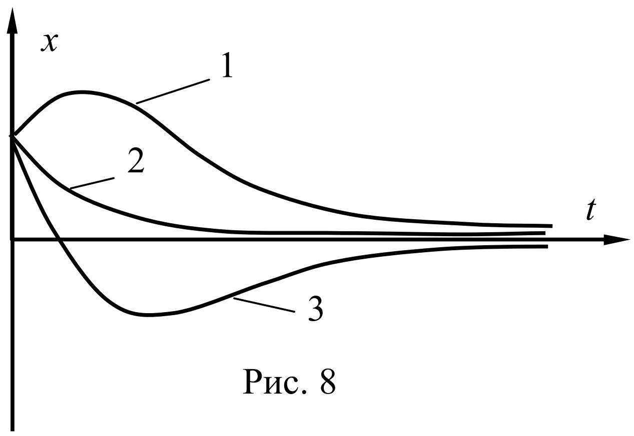

Рис. 8

Из графиков видно, что движение точки в этом случае носит не колебательный характер и точка с течением времени асимптотически приближается к положению равновесия: $\lim\limits_{t \to 0} x = 0$.

При этом кривая – 1 соответствует случаю, когда $\dot{x}_0 > 0$; кривая 2 соответствует случаю, когда $\dot{x}_0 = 0$; кривая 3 соответствует случаю, когда $\dot{x}_0 < 0$. Во всех трех примерах принято, что $x_0 > 0$.

14. Случай апериодического движения (n = k)

Если $n = k$ (***это также случай большого сопротивления среды***), то корень характеристического уравнения (17) $\lambda_{1,2} = -n$, то есть является кратным, действительным и отрицательным. Решение уравнения (16) в этом случае имеет вид:

$$x = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-nt}. \qquad (22)$$

Взяв производную по времени от (22) и использовав начальные условия, можно определить постоянные интегрирования C_1 и C_2. В этом случае, найдя предел по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{t \to 0} x = \lim_{t \to 0} \frac{C_1 + C_2 \cdot t}{e^{nt}} = \lim_{t \to 0} \frac{C_2}{n \cdot e^{nt}} = 0.$$

Следовательно, и в этом случае движение точки носит неколебательный характер, и точка с течением времени асимптотически приближается к положению равновесия. Сценарии развития событий в этом случае такие же, как и на рис. 8.

15. Вынужденные колебания точки

Рассмотрим движение точки (рис. 9) под действием восстанавливающей и некоторой периодической силы: $F = F_0 \cdot \sin(\omega t)$, сопротивление среды не учитываем.

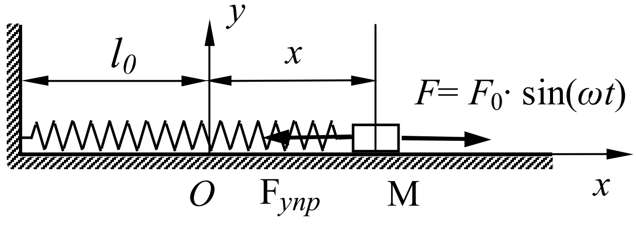

Рис. 9

Колебания точки под действием этих сил называются вынужденными. Уравнение движения точки в этом случае имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx + F_0 \sin(\omega t).$$

Разделив на массу и обозначив $k^2 = c/m,\quad H_0 = F_0/m$, получим ***уравнение вынужденных колебаний точки без учета сопротивления среды:***

$$\ddot{x} + k^2 x = H_0 \cdot \sin(\omega t). \tag{23}$$

Уравнение (23) является неоднородным. Его общее решение $x = x_1 + x_2$, где: $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ - общее решение соответствующего однородного уравнения; x_2 – частное решение уравнения (23). Частное решение ищем в виде $x_2 = A \cdot \sin(\omega t)$. Подставив это решение в уравнение (23), найдем A амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{H_0}{k^2 - \omega^2} = \frac{F_0/m}{k^2(1-\omega^2/k^2)} = \frac{1}{1-\omega^2/k^2} \cdot \frac{F_0}{c} = \eta \cdot \frac{F_0}{c}.$$

Общее решение уравнения (23):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{F_0/c}{1-\omega^2/k^2} \sin \omega t. \tag{24}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно найти из начальных условий: при $t = 0,\quad x = x_0,\quad \dot{x} = v_0$. Коэффициент $\eta = \dfrac{1}{1-\omega^2/k^2}$ - называется коэффициентом динамичности (рис. 10) и показывает, во сколько раз амплитуда

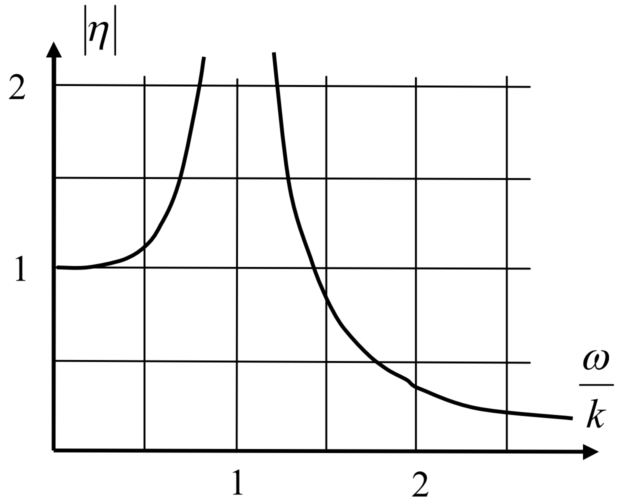

Рис. 10 Зависимость коэффициента динамичности от соотношения частот

вынужденных колебаний больше статического смещения точки под действием силы F_0.

16. Резонанс

Резонансом называется явление, возникающее в случае, когда частота свободных колебаний – k, совпадает с частотой возмущающей силы – ω. В этом случае коэффициент динамичности – η = ∞, и функция (24) уже не является решением уравнения (23), так как амплитуда вынужденных колебаний равна бесконечности. Уравнение движения точки в этом случае имеет вид (p = k = ω):

$$\ddot{x} + p^2 x = H_0 \cdot sin(p\,t) \tag{25}$$

Наибольший интерес представляет частное решение уравнения (25), соответствующее вынужденным колебаниям, поскольку свободные колебания быстро затухают, даже при наличии малого сопротивления среды. Частное решение уравнения (25) ищем в виде $x_2 = A \cdot t \cdot cos(p\,t)$. Взяв от x_2 вторую производную по времени, найдем $\ddot{x}_2 = -2Ap\,sin(\,pt\,) - Ap^2 t\,cos(\,pt\,)$. Подставив x_2 и $\ddot{x}_2$ в (25), получим:

$$-2Ap\,sin(\,pt\,) - Ap^2 t\,cos(\,pt\,) + Ap^2 t\,cos(\,pt\,) = H_0 \cdot sin(\,p\,t\,)\,.$$

Два последних слагаемых в левой части равенства взаимно уничтожаются. Тогда, приравняв коэффициенты при $sin(\,pt\,)$, находим $A = -\dfrac{H_0}{2p}$. В результате частное решение уравнения (25), описывающее вынужденные колебания при резонансе, примет вид $x_2 = -\dfrac{H_0}{2p} \cdot t \cdot cos(p\,t)$. График этой функции показан на рис. 11.

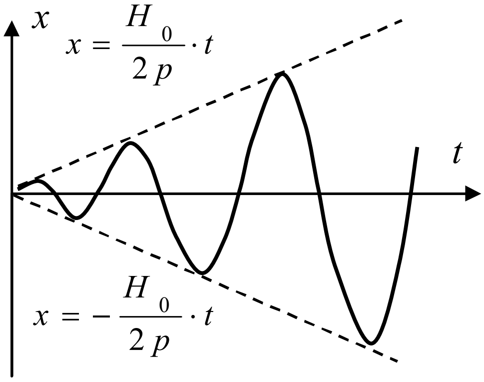

Рис. 11

Из рисунка видно, что амплитуда колебаний точки при резонансе нарастает с течением времени. Поэтому если рабочая частота выше собственной частоты колебаний, то стараются достичь ее как можно быстрее, чтобы при переходе через резонансную частоту не успели развиться, слишком большие колебания.

17. Теорема об изменении количества движения точки

Количеством движения точки называется вектор, равный произведению массы точки на её скорость **-** $m\overline{V}$ (рис. 12).

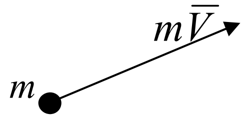

Рис. 12

Запишем основное уравнение динамики: $m\overline{a} = \sum \overline{F}_k$, или $m\dfrac{d\overline{V}}{dt} = \sum \overline{F}_k$. Внеся массу под знак дифференциала (m = const), получим **теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме**:

$\dfrac{d\left(m\overline{V}\right)}{dt} = \sum \overline{F}_k$ ***- производная по времени от количества движения точки равна сумме сил, действующих на нее.*** Разделяя переменные и интегрируя, имеем $\int\limits_{\overline{v}_0}^{\overline{v}} d\left(m\overline{V}\right) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum \overline{F}_k\, dt$. Поменяв местами действия суммирования и интегрирования в правой части уравнения, взяв интеграл в левой части уравнения и обозначив: $\int\limits_{t_0}^{t} \overline{F}_k\, dt = \overline{S}_k$,получим **теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме**:

$$m\overline{V} - m\overline{V}_0 = \sum \overline{S}_k \qquad (26)$$

Вектор $\overline{S}_k$ называется импульсом силы. Если $\overline{F}$ = const, то $\overline{F} = \overline{S}\cdot t$.

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов сил, действующих на неё за тот же промежуток времени.

Теорема об изменении количества движения точки векторная, ее можно записать в проекциях на оси координат:

$$mV_x - mV_{0x} = \sum S_{kx}\ ;$$
$$mV_y - mV_{0y} = \sum S_{ky}\ ;$$
$$mV_z - mV_{0z} = \sum S_{kz}\ .$$

18. Теорема об изменении момента количества движения точки

Моментом количества движения точки относительно т. О, называется вектор $\bar{l}_O$, равный векторному произведению радиус-вектора, проведенного из т. О в рассматриваемую точку на вектор ее количества движения (рис.13).

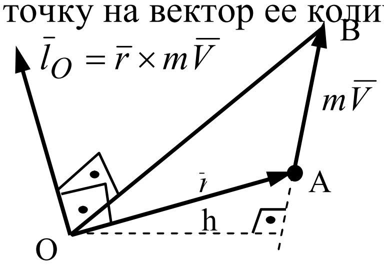

Рис. 13

$$\bar{l}_O = \bar{m}_O\left(m\bar{V}\right) = \bar{r} \times m\bar{V}.$$

Понятие момента количества движения точки вводится по аналогии с понятием момента силы:

$$\bar{m}_O\left(\bar{F}\right) = \bar{m}_O\left(\bar{F}\right) = \bar{r} \times \bar{F},$$

т.е. модуль момента количества движения точки можно найти по формуле: $\left|\bar{l}_O\right| = \left|m\bar{V}\right| \cdot h$, где h – плечо. Направление вектора $\bar{l}_O$ определяется по правилу векторного произведения. Геометрически момент количества движения точки равен удвоенной площади Δ OAB.

Теорема: ***Производная по времени от момента количества движения точки относительно центра О равна сумме моментов сил, действующих на неё, относительно того же центра***.

$$\frac{d\bar{l}_O}{dt} = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k). \tag{27}$$

Доказательство: $\dfrac{d\,\bar{l}_O}{dt} = \dfrac{d\left(\bar{r} \times m\bar{V}\right)}{dt} = \dfrac{d\,\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} + \bar{r} \times \dfrac{d\left(m\bar{V}\right)}{dt}$.

Но $\dfrac{d\,\bar{r}}{dt} = \bar{V}$, а по теореме об изменении количества движения $\dfrac{d\left(m\bar{V}\right)}{dt} = \sum \bar{F}_k$, тогда $\dfrac{d\,\bar{l}_O}{dt} = \bar{V} \times m\bar{V} + \bar{r} \times \sum \bar{F}_k$.

Учитывая, что векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю: $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$, а $\bar{r} \times \sum \bar{F}_k = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k)$, получим:

$$\frac{d\,\bar{l}_O}{dt} = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k),$$

что и требовалось доказать.

Теорема об изменении момента количества движения точки векторная, поэтому её можно записать в проекциях на оси координат:

$$\frac{dl_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_k); \qquad \frac{dl_y}{dt} = \sum m_y(\overline{F}_k); \qquad \frac{dl_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k).$$

19. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении. Мощность

Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении (рис. 14) равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения:

$A = F \cdot s \cdot cos\alpha$.

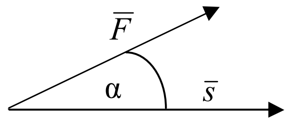

Рис. 14

Если сила, действующая на точку, является переменной или её перемещение является криволинейным (рис. 15), то в этом случае вводится понятие элементарной работы силы dA, которой называется работа силы на бесконечно малом перемещении. Поскольку бесконечно малое перемещение можно считать прямолинейным, а силу на этом перемещении постоянной, то

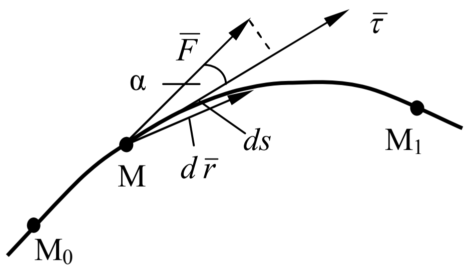

Рис. 15

$dA = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|d\,\bar{r}\right| \cdot cos\,\alpha$. Соответственно элементарная работа силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения: $dA = \overline{F} \cdot d\,\bar{r}$. Если раскрыть скалярное произведение, то получим

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad . \tag{28}$$

Учитывая, что направление вектора $d\,\bar{r}$ в пределе совпадает с направлением вектора $\bar{\tau}$, а $\left|d\,\bar{r}\right| = ds$, получим еще одну формулу: $dA = F_\tau ds$.

Работа силы на конечном перемещении M_0M_1 равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы:

$$A = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} dA = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds = \ldots = \int\limits_{(M_0)}^{(M_1)} F_x dx + F_y dy + F_z dz \,.$$

Геометрически работа силы равна площади криволинейной трапеции (рис. 16).

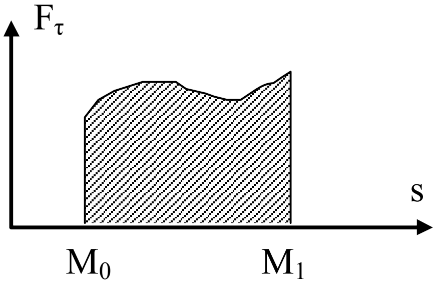

Рис. 16

Средней мощностью силы называется отношение работы силы к промежутку времени, за который она совершена: $N_{cp} = A / \Delta t$. Мощностью силы в данный момент называется отношение элементарной работы к бесконечно малому промежутку времени: $dN = dA / dt = \overline{F} \cdot \dfrac{d\,\overline{r}}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{V}$, т.е. мощность силы равна скалярному произведению вектора силы на скорость. Работа измеряется в джоулях, а мощность в ваттах. 1 Дж = 1 Н·м. 1Вт = 1 Дж/с.

20. Работа силы тяжести

Пусть точка переместилась из положения M_0 в положение M_1, как показано на рис.17. Силу тяжести на этом перемещении считаем постоянной.

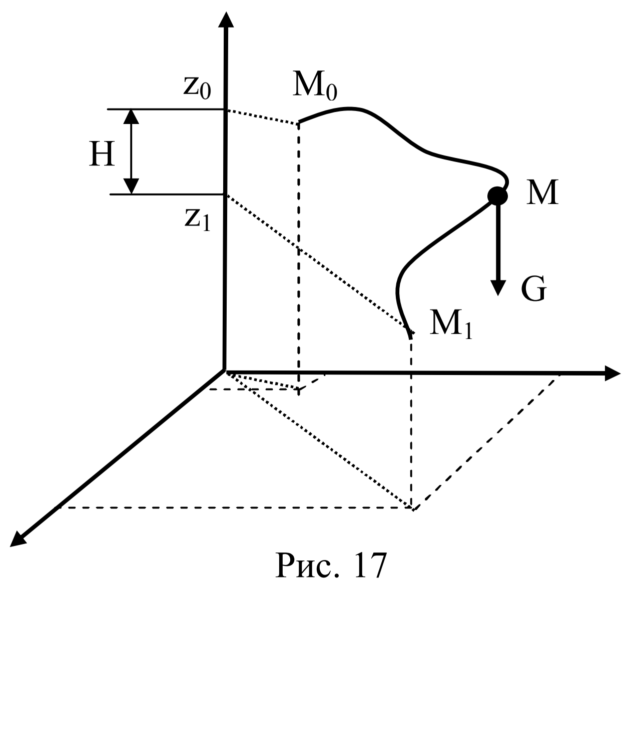

Рис. 17

Это можно сделать, если перемещение происходит вблизи поверхности земли. Для определения работы силы тяжести воспользуемся формулой (28). Из рис. 17 видно, что: $F_x = F_y = 0,$ а $F_z = - G$, тогда

$$A = \int_{z_0}^{z_1} - Gdz = -G\left(z_1 - z_0\right) = G\left(z_0 - z_1\right).$$

Окончательно $A = G \cdot H.$

Работа силы тяжести тела равна произведению силы тяжести на высоту. При этом работа положительна, если тело опускается вниз, и отрицательна, если тело поднимается. Работа силы тяжести не зависит от траектории, по которой перемещается точка, а зависит лишь от её начального и конечного положения. Работа силы тяжести на замкнутом перемещении равна нулю.

21. Работа силы упругости

Определим работу силы упругости на перемещении груза М из положения M_0 в положение M_1 (рис. 18). Силу упругости считаем пропорциональной деформации упругого элемента с жесткостью с, (Н/м). В этом случае силу упругости можно найти по формуле: $F_{упр} = cx$, где x – деформация упругого элемента в рассматриваемом положении, которая равна координате x груза М.

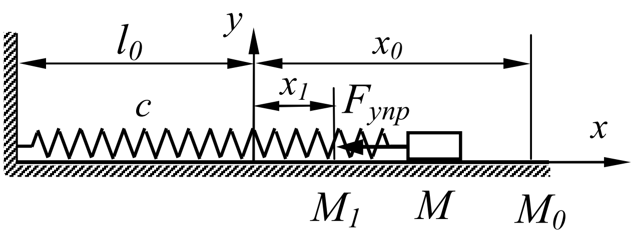

Рис. 18

Для определения работы силы тяжести воспользуемся формулой (28).

.

Из рис.18 видно, что: $F_x = -F_{упр} = -cx,$ а $F_y = F_z = 0$, тогда

$$A = \int_{x_0}^{x_1} - cxdxz = -0{,}5c\left(x_1^2 - x_0^2\right) = 0{,}5c\left(x_0^2 - x_1^2\right).$$

Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого элемента на разность квадратов начальной и конечной деформации.

22. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Определение**: кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости**: $T = \frac{1}{2} m V^2$. Пусть точка М перемещается из положения M_0 в положение M_1 (рис. 19) под действием системы сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_n}$.

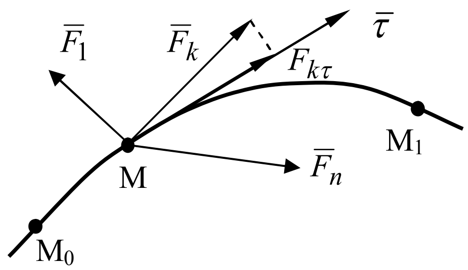

Рис. 19

Воспользуемся основным уравнением динамики в проекции на касательную: $ma_\tau = \sum F_{k\tau}$, или

$$m\frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau} .$$

Учитывая, что $m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = mV\frac{dV}{ds} = \frac{d\left(mV^2/2\right)}{ds}$, получим

$$\frac{d\left(mV^2/2\right)}{ds} = \sum F_{k\tau} , \text{ или}$$

$$d\left(mV^2/2\right) = \sum F_{k\tau} ds . \qquad (29)$$

Но $F_{k\tau} ds = dA_k$ - элементарная работа силы F_k, а $mV^2/2 = T$ - кинетическая энергия точки. С учетом этого формула (29) примет вид: $d(T) = \sum dA_k$ или, разделив на dt

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k . \qquad (30)$$

Формула (30), это и есть *теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме**: производная по времени от кинетической энергии точки равна сумме мощностей сил, действующих на нее.***

Проинтегрировав выражение (29) в пределах перемещения точки, получим *теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме*:

$$mV_1^2/2 - mV_0^2/2 = \sum A_k . \qquad (31)$$

Изменение кинетической энергии точки на некотором перемещении равно сумме работ сил, приложенных к ней, на том же перемещении.

23. Внешние и внутренние силы

Внутренними называются силы, действующие между точками, входящими в рассматриваемую систему. Они обозначаются $\overline{F}^{(i)}$.

Внешними называются силы, действующие между точками системы и телами не входящими в нее. Они обозначаются $\overline{F}^{(e)}$. Например, для системы, состоящей из стола и тела, лежащего на нем, внутренними являются сила давления тела на стол и сила реакции стола на тело. Внешними для данной системы тел являются силы тяжести тела и стола, а также сила реакции пола на стол.

Согласно закону равенства действия и противодействия сумма внутренних сил, а также сумма моментов внутренних сил системы относительно произвольного центра равны нулю:

$$\sum \overline{F}_k^{(i)} = 0; \qquad \sum \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^{(i)}\right) = 0. \tag{32}$$

Следует иметь в виду, что несмотря на свойства внутренних сил (32), система точек под их действием может и не находиться в равновесии, т.к. эти силы приложены к различным точкам системы.

24. Масса системы, центр масс, момент инерции системы точек относительно оси

Массой системы точек называется скалярная величина, равная сумме масс всех точек системы: $M = \sum m_k$.

Координаты центра масс системы (обозначается т. С) находятся по формулам, аналогичным формулам для определения координат центра тяжести:

$$M\overline{r}_C = \sum m_k \overline{r}_k , \tag{33}$$

где m_k и $\overline{r}_k$ – соответственно масса и радиус вектор точки с номером k; а M и $\overline{r}_C$ – масса системы и радиус - вектор центра масс. Формула (33) векторная, координаты центра масс определяются по аналогичным формулам:

$$Mx_C = \sum m_k x_k; \quad My_C = \sum m_k y_k; \quad Mz_C = \sum m_k z_k. \tag{33$'$}$$

Моментом инерции системы относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс точек на квадрат расстояния от точек до оси (рис. 20):

$$J_z = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right). \tag{34}$$

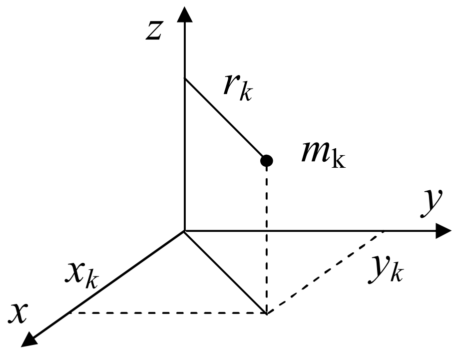

Рис. 20

25. Момент инерции однородного стержня

Найдем момент инерции однородного стержня длиной $2l$ относительно оси z, проходящей через его центр масс (рис. 21).

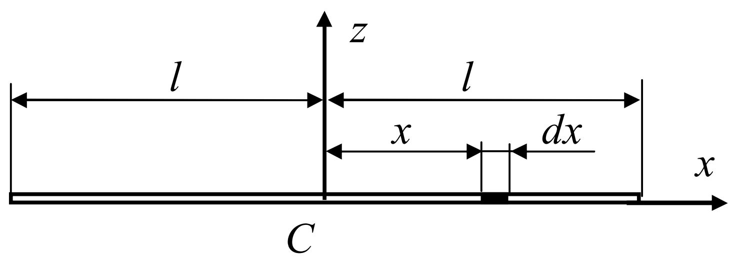

Рис. 21

Пусть γ – линейная плотность стержня (масса единицы его длины, кг/м). Выделим на расстоянии x от оси Cz элементарный отрезок длиной dx. Момент инерции этого элементарного отрезка относительно оси

$$\text{C}z: \quad dJ_{Cz} = dm \cdot x^2 .$$

Но $dm = \gamma \cdot dx$, тогда $dJ_{Cz} = \gamma \cdot x^2 dx$. Проинтегрировав это выражение, получаем

$$J_{Cz} = \int_{-l}^{l} \gamma \cdot x^2 dx = \left.\frac{\gamma \cdot x^3}{3}\right|_{-l}^{l} = \frac{2\gamma \cdot l^3}{3} .$$

Но $\gamma \cdot 2l = m$ – масса стержня.

Окончательно момент инерции однородного стержня длиной $2l$ относительно центральной оси

$$J_{Cz} = \frac{m \cdot l^2}{3} .$$

26. Момент инерции однородного кольца

Найдем момент инерции однородного кольца относительно оси Cz, проходящей через его центр масс (рис. 22).

Пусть γ – поверхностная плотность кольца (масса единицы его площади), кг/м^2. Выделим на расстоянии r от оси Cz элементарное кольцо толщиной dr.

Момент инерции этого элементарного кольца относительно оси

Cz: $dJ_{Cz} = dm \cdot r^2$.

Но $dm = \gamma \cdot 2\pi r \cdot dr$, тогда $dJ_{Cz} = \gamma \cdot 2\pi r^3 \cdot dr$.

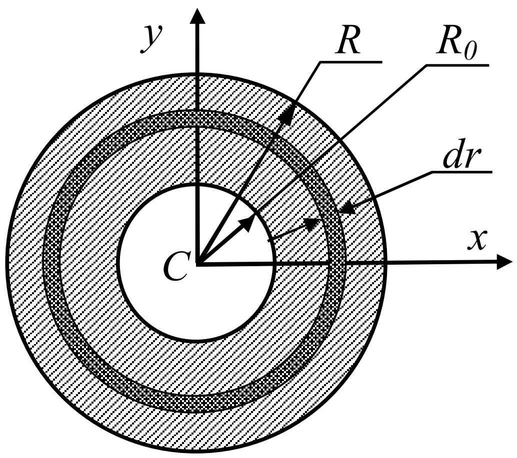

Рис. 22

Проинтегрировав это выражение, получаем

$$J_{Cz} = \int_{R_0}^{R} \gamma \cdot 2\pi r^3 \cdot dr = \left.\frac{2\pi\gamma \cdot r^4}{4}\right|_{R_0}^{R} = \frac{\pi\gamma \cdot \left(R^4 - R_0^4\right)}{2} = \frac{\gamma \cdot \left(\pi R^2 - \pi R_0^2\right) \cdot \left(R^2 + R_0^2\right)}{2}$$

Но $\gamma \cdot \left(\pi R^2 - \pi R_0^2\right) = m$ – масса кольца.

Окончательно момент инерции однородного кольца относительно центральной оси

$$J_{Cz} = \frac{m \cdot \left(R^2 + R_0^2\right)}{2}. \qquad (35)$$

Для однородного диска радиуса R (R_0=0) из (35) имеем: $J_{Cz} = \dfrac{m \cdot R^2}{2}$.

В случае, когда масса распределена по ободу, $R_0 = R$ и $J_{Cz} = m \cdot R^2$.

27. Теорема Гюйгенса

Для системы точек, показанной на рис. 23, момент инерции относительно оси Oz можно найти по формуле (34).

Выберем ось Ox так, что бы она проходила через центр масс системы (т. C). Пусть расстояние между осями z и z $OC = d$. Свяжем с т. C новую систему координат $Cx_1y_1z_1$. Очевидно, что координаты точек в системах $Oxyz$ и $Cx_1y_1z_1$ связаны между собой соотношениями

$$x_k = x_{1k}+d, \quad y_k = y_{1k}, \quad z_k = z_{1k}.$$

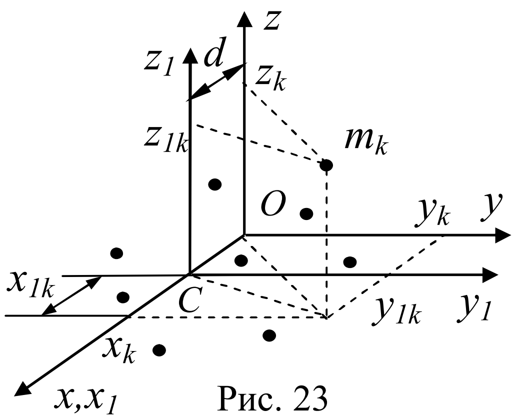

Рис. 23

Тогда

$$J_{Oz} = \sum m_k\left((x_{1k}+d)^2 + y_{1k}^2\right) = \sum m_k\left(x_{1k}^2 + y_{1k}^2\right) + \sum 2m_k x_{1k} d + \sum m_k d^2 .$$

Но $\sum m_k\left(x_{1k}^2 + y_{1k}^2\right) = J_{Cz1}$; $\sum 2m_k x_{1k} d = 2d\sum m_k x_{1k} = 2d \cdot M \cdot x_{1C} = 0$ (см. (33′)), $\sum m_k d^2 = Md^2$. С учетом этого

$$J_{Oz} = J_{Cz1} + Md^2 . \qquad (36)$$

Формула (36) связывает моменты инерции относительно параллельных осей и выражает *теорему Гюйгенса:* ***момент инерции системы точек относительно произвольной оси, параллельной центральной, складывается из центрального момента инерции и произведения массы системы на квадрат расстояния между осями.***

28. Теорема о движении центра масс

Пусть имеется система точек, на каждую из которых действуют внешние и внутренние силы. Обозначим равнодействующие этих сил, приложенных к точке с номером k, соответственно $\overline{F}_k^{(e)}$ и $\overline{F}_k^{(i)}$. Запишем основное уравнение динамики для точки с номером k: $m_k \cdot \overline{a}_k = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)}$. Записывая подобные уравнения для каждой точки системы, и суммируя их, получим

$$\sum m_k \cdot \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{F}_k^{(i)} . \qquad (37)$$

По свойствам внутренних сил (32) $\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$. Кроме того, взяв вторую производную от равенства (33) , получим

$$M\bar{a}_C = \sum m_k \cdot \bar{a}_k .$$

С учетом этого формула (37) примет вид:

$$M\bar{a}_C = \sum F_k^{(e)} . \qquad (38)$$

Формула (38) выражает *теорему о движении центра масс:* ***центр масс системы двигается как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на ее точки***.

29. Теорема об изменении количества движения системы

Определение: количеством движения системы точек называется вектор $\bar{Q}$, равный геометрической сумме количеств движения всех точек системы:

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k .$$

Запишем теорему об изменении количества движения для точки с номером k:

$\dfrac{d\left(m_k \bar{V}_k\right)}{dt} = \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)}$. Здесь, как и ранее, $\bar{F}_k^{(e)}$ и $\bar{F}_k^{(i)}$ – соответственно равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к точке с номером k. Записывая подобные уравнения для каждой точки системы и, суммируя их, получим

$$\sum \frac{d\left(m_k \bar{V}_k\right)}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} + \sum \bar{F}_k^{(i)} .$$

Учитывая, что $\sum \bar{F}_k^{(i)} = 0$, получим, поменяв местами, знаки суммирования и дифференцирования в левой части равенства:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^{(e)} . \qquad (39)$$

Формула (39) выражает *теорему об изменении количества движения системы точек в дифференциальной форме:* ***производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на ее точки.***

Умножив равенство (39) на dt и проинтегрировав, получим *теорему об изменении количества движения системы точек в интегральной форме*:

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^{(e)} , \qquad (40)$$

где $\overline{S}_k^{(e)} = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{F}_k^{(e)} dt$ – импульс силы $\overline{F}_k^{(e)}$.

Изменение количества движения системы точек за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на её точки за тот же промежуток времени.

Теоремы (39) и (40) – векторные, их можно записать в проекции на оси координат. *Закон сохранения количества движения системы* вытекает из формул (39) и (40): ***если в течение некоторого промежутка времени, сумма внешних сил, действующих на точки системы, равна нулю, то ее количество движения все это время остается неизменным.***

30. Связь между количеством движения системы, массой системы и скоростью ее центра масс

Взяв производную по времени от равенства (33) получим, учитывая, что $\frac{d\overline{r}_C}{dt} = \overline{V}_C, \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \overline{V}_k$: $M\overline{V}_C = \sum m_k \cdot \overline{V}_k$.

Но по определению $\overline{Q} = \sum m_k \overline{V}_k$, тогда

$$\overline{Q} = M\overline{V}_C. \tag{41}$$

Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс.

31. Применение теоремы об изменении количества движения системы к сплошным средам

Рассмотрим

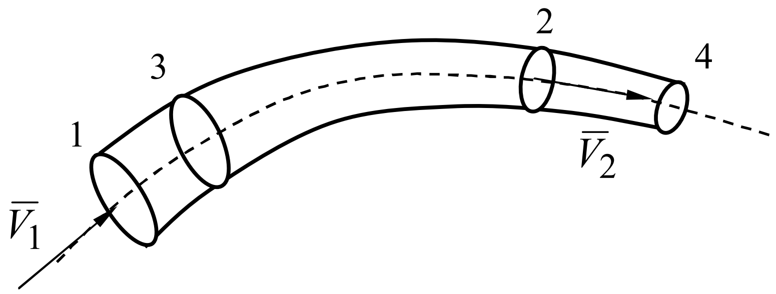

Рис. 24

стационарный поток жидкости, т.е. такой, у которого в каждой точке скорость, давление и плотность остаются неизменными с течением времени. В случае ламинарного течения (жидкость перемещается слоями, без перемешивания) траектории частиц жидкости являются линиями тока.

Выделим в потоке жидкости (рис. 24) объем, ограниченный линиями тока и двумя сечениями 1 и 2.

Пусть за малое время dt этот объем переместился из положения 1-2 в положение 3-4. Тогда изменение его количества движения: $d\overline{Q} = \overline{Q}_{12} - \overline{Q}_{34}$. Но $\overline{Q}_{12} = \overline{Q}_{13} + \overline{Q}_{34} - \overline{Q}_{24}$.

С учетом этого

$$d\overline{Q} = \overline{Q}_{13} - \overline{Q}_{24}. \qquad (42)$$

Обозначим секундный массовый расход жидкости M_C (масса жидкости, протекающая через сечение трубки тока за одну секунду), кг/м. Учитывая, что при ламинарном потоке ни одна частица жидкости не выходит за границы трубки тока, то по закону сохранения вещества расход жидкости в любом сечении трубки тока одинаков: $M_C = \gamma \cdot S \cdot V$, где

γ – объемная плотность жидкости, кг/м^3; S и V – соответственно площадь произвольного сечения трубки тока и скорость жидкости в этом сечении.

Тогда: $\overline{Q}_{13} = M_C \cdot dt \cdot \overline{V}_1$; $\overline{Q}_{24} = M_C \cdot dt \cdot \overline{V}_2$ и формула (42) принимает вид: $d\overline{Q} = M_C \cdot dt \cdot \left(\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right)$. Подставив это выражение в теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме (39), получим

$$M_C \cdot \left(\overline{V}_1 - \overline{V}_2\right) = \sum F_k^{(e)}. \qquad (43)$$

Произведение $M_C \cdot \overline{V}$ - называют секундным количеством движения. Тогда ***разность секундных количеств движения жидкости в двух сечениях трубки тока равна сумме объемных и поверхностных сил, действующих на ее частицы, заключенные между этими сечениями.***

32. Теорема об изменении момента количества движения системы

Моментом количества движения системы точек относительно центра О называется вектор $\overline{L}_O$, равный геометрической сумме векторов моментов количества движения всех точек системы относительно того же центра:

$$\overline{L}_O = \sum \overline{l}_{Ok} = \sum \overline{m}_O\left(m_k \overline{V}_k\right) = \sum \overline{r}_k \times m_k \overline{V}_k .$$

Теорема: ***Производная по времени от момента количества движения системы точек относительно центра О равна сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы относительно того же центра***.

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)}) \tag{44}$$

Доказательство. Запишем теорему об изменении момента количества движения для точки с номером k: $\frac{d\overline{l}_{Ok}}{dt} = \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)}) + \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)})$.

Записывая подобные уравнения для каждой точки системы, и суммируя их, получим: $\sum \frac{d\overline{l}_{Ok}}{dt} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)}) + \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)})$.

Учитывая, что по свойствам внутренних сил $\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(i)}) = 0$, получим, поменяв местами знаки суммирования и дифференцирования в левой части уравнения: $\frac{d\sum \overline{l}_{Ok}}{dt} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)})$, или $\frac{d\overline{L}_O}{dt} = \sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)})$. Что и требовалось доказать.

Теорема об изменении момента количества движения точки векторная, поэтому её можно записать в проекциях на оси координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_k^{(e)}); \qquad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y(\overline{F}_k^{(e)}); \qquad \frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)}).$$

Закон сохранения: ***Если в течение некоторого времени сумма моментов внешних сил, действующих на точки системы, относительно центра О равна нулю, то момент количества движения системы относительно этого центра все это время остается неизменным.***

33. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z (рис. 25), можно рассматривать как систему точек. Момент количества движения этой системы относительно оси z называют ***кинетическим моментом*** твердого тела относительно оси вращения:

$$L_z = \sum m_z(m_k\overline{V}_k) = \sum |\overline{r}_k| \cdot |m_k\overline{V}_k|.$$

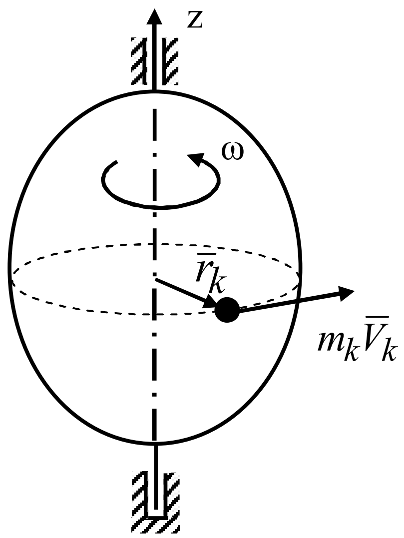

Рис. 25

Учитывая, что при вращательном движении:

$$\left|\bar{V}_k\right| = \omega \cdot \left|\bar{r}_k\right|, \text{ а } \left|\bar{r}_k\right| \cdot \left|\bar{r}_k\right| = r_k^2, \text{ получим}$$

$L_z = \sum m_k r_k^2 \cdot \omega$. По формуле (34) получим

$$L_z = J_z \omega \qquad (45)$$

– ***кинетический момент твердого тела вращающегося вокруг неподвижной оси равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения на его угловую скорость.***

34. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Определение: кинетической энергией системы точек называется скалярная величина равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum m_k V_k^2 / 2$$

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для точки с номером k:

$$m_k V_{1k}{}^2 / 2 - m_k V_{0k}{}^2 / 2 = A_k^{(e)} + A_k^{(i)},$$

где $A_k^{(e)}$ и $A_k^{(i)}$ - соответственно работа внешних и внутренних сил действующих на точку с номером *k*. Записывая подобные уравнения для каждой точки системы, и суммируя их, получим

$$\sum m_k V_{1k}{}^2 / 2 - \sum m_k V_{0k}{}^2 / 2 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}. \qquad (46)$$

По определению $\sum m_k V_{1k}^2 / 2 = T_1$, а $\sum m_k V_{0k}^2 / 2 = T_0$. Тогда (45) примет вид:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}. \qquad (47)$$

Формула (47) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы: ***изменение кинетической энергии системы на некотором перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на точки системы на том же перемещении.***

Аналогично можно получить теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^{(e)} + \sum N_k^{(i)}$$

– ***производная по времени от кинетической энергии системы равна сумме мощностей внешних и внутренних сил, действующих на ее точки.***

35. Кинетическая энергия твердого тела в различных случаях движения.

Поступательное движение.

В этом случае скорости всех точек тела одинаковы. Тогда: $T = \sum m_k V_k^2 / 2 = \sum m_k V^2 / 2 = MV^2 / 2$ – ***кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на его скорость.***

Вращательное движение

В этом случае $V_k = \omega \cdot r_k$. Тогда

$$T = \sum m_k V_k^2 / 2 = \left(\sum m_k r_k^2\right) \cdot \omega^2 / 2 = J_{Oz} \omega^2 / 2$$

– ***кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.***

Плоское движение

Плоское движение в данный момент можно рассматривать, как вращательное вокруг мгновенного центра скоростей (т. P, рис. 26).

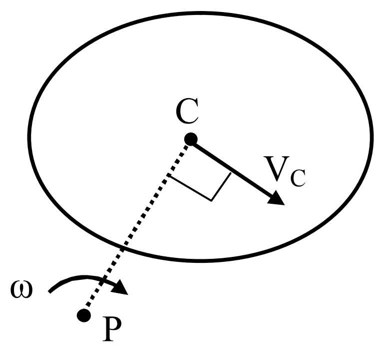

Рис. 26

Тогда $T = J_{Pz}\omega^2 / 2$. Но по теореме Гюйгенса (36)

$$J_{Pz} = J_{Cz} + M \cdot (PC)^2.$$

Тогда $T = J_{Cz}\omega^2 / 2 + M(\omega \cdot PC)^2 / 2$. Но $\omega \cdot PC = V_C$.
Окончательно получаем

$$T = MV_C{}^2 / 2 + J_{Cz}\omega^2 / 2.$$

Из этой формулы видно, что кинетическая энергия при плоском движении состоит из двух слагаемых, первое из которых соответствует поступательному движению тела вместе с центром масс, а второе – вращательному движению вокруг оси, проходящей через центр масс.

36. Дифференциальные уравнения поступательного и вращательного движения твердого тела

При поступательном движении все точки тела двигаются одинаково, поэтому для описания поступательного движения твердого тела достаточно описать движение хотя бы одной его точки. Если в качестве этой точки выбрать центр масс тела (т. С), то для этого можно использовать теорему о движении центра масс (38) или в проекции на оси координат:

$$M\,\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}\;;\quad M\,\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}\;;\quad M\,\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{(e)}\;.$$

Для описания вращательного движения воспользуемся теоремой об изменении момента количества движения системы (44) в проекции на ось z (ось вращения): $\dfrac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)})$. Кинетический момент твердого тела относительно оси вращения найдем по формуле (45). В результате получим: $\dfrac{d(J_z\omega)}{dt} = \sum \overline{m}_z(\overline{F}_k^{(e)})$. Поскольку момент инерции тела – величина постоянная: J_z = const, то, вынеся его за знак производной, получим $\dfrac{d(J_z\omega)}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)})$ или $J_z\dfrac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)})$ – ***это и есть дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела***. Поскольку $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} = \varepsilon$ - угловое ускорение, то это уравнение можно записать в виде: $J_z\varepsilon = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)})$ или $J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z(\overline{F}_k^{(e)})$. Можно заметить, что это уравнение по своей структуре аналогично основному уравнению динамики (1). При его решении могут возникнуть две задачи динамики: прямая и обратная.

37. Дифференциальные уравнения плоского движения

Плоское движение твердого тела можно представить как сумму двух движений: поступательного – вместе с центром масс и вращательного – вокруг центра масс. Отсюда следует, что для описания плоского движения необходимо описать движение его центра масс, а для этого можно использовать теорему о движении центра масс (38) в проекции на плоскость движения (Oxy):

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)}; \quad M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)}.$$

Для описания вращательной составляющей плоского движения можно использовать теорему об изменении момента количества движения системы в относительном движении по отношению к центру масс, которая имеет вид, аналогичный (44): $\frac{d\overline{L}_C}{dt} = \sum \overline{m}_C(\overline{F}_k^{(e)})$, или в проекции на ось перпендикулярную плоскости движения:

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = \sum m_{Cz}(\overline{F}_k^{(e)}). \tag{48}$$

Учитывая, что (45): $L_{Cz} = J_{Cz}\omega = J_{Cz}\dot{\varphi}$, находим $J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(\overline{F}_k^{(e)})$. Таким образом, получили три уравнения, которые и называются дифференциальными уравнениями плоского движения:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{(e)} \\ M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{(e)} \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum m_{Cz}(F_k^{(e)}) \end{cases} \tag{49}$$

38. Принцип Даламбера для точки и системы

Полученные ранее теоремы выведены из основного уравнения динамики. Те же теоремы можно получить и исходя из других положений, которые называются принципами механики.

Принцип Даламбера для точки формулируется так: ***если к активным силам и силам реакций связей, действующим на точку добавить силу инерции, то такая система сил будет уравновешенной***:

$$\overline{F}^{(a)} + \overline{F}^{(r)} + F^{(u)} = 0. \tag{50}$$

Здесь обозначено: $\overline{F}^{(a)}$ – равнодействующая активных (заданных) сил, действующих на точку; $\overline{F}^{(r)}$ – равнодействующая сил реакций; $\overline{F}^{(u)} = -m\overline{a}$ - сила инерции. Нетрудно увидеть, что принцип Даламбера для точки эквивалентен основному уравнению динамики (1). Действительно, подставив в (50) выражение для силы инерции, получим

$$\overline{F}^{(a)} + \overline{F}^{(r)} = m\overline{a},$$

что эквивалентно (1).
Применяя принцип Даламбера для каждой точки системы, получим

$$\overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)} + \overline{F}_k^{(u)} = 0\ ,\quad k = 1 \ldots n. \qquad (51)$$

Здесь $\overline{F}_k^{(e)}$, $\overline{F}_k^{(i)}$ – соответственно равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку с номером k, $\overline{F}_k^{(u)} = -m_k \overline{a}_k$ - сила инерции точки с номером k. Принцип Даламбера для системы (51) представляет собой n уравнений и формулируется так:
если к каждой точке системы кроме внешних и внутренних сил, действующим на нее, приложить силу инерции, то такая система сил будет уравновешенной.
Принцип Даламбера часто называют методом кинетостатики, поскольку он позволяет решать задачи динамики путем составления уравнений равновесия, т.е. методами статики.

39. Главный вектор и главный момент сил инерции

Определение: ***главным вектором сил инерции называется вектор, равный геометрической сумме векторов сил инерции.*** $\overline{R}^{(u)} = \sum F_k^{(u)}$.
Просуммировав уравнения (51) с учетом того, что по свойствам внутренних сил (32) $\sum \overline{F}_k^{(i)} = 0,$ а по теореме о движении центра масс (38): $\sum \overline{F}_k^{(e)} = m\overline{a}_C$, получим

$$\overline{R}^{(u)} = -m\overline{a}_C$$

Определение: ***главным моментом сил инерции относительно точки О (оси), называется пара сил с моментом, равным геометрической сумме моментов сил инерции относительно той же точки (оси).***

$$\overline{M}_O^{(u)} = \sum \overline{m}_O(F_k^{(u)}),\ M_z^{(u)} = \sum m_z(F_k^{(u)}).$$

Поскольку система сил, определяемых уравнением (51) является уравновешенной, то для нее справедливо равенство:

$$\overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(e)}\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(i)}\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{(u)}\right) = 0\ ,\quad k = 1 \ldots n. \qquad (52)$$

Просуммировав уравнения (52) с учетом того, что по свойствам внутренних сил (32) $\sum \overline{m}_O\left(\overline{F}_k^{(i)}\right) = 0,$ а по теореме об изменении момента количества движения системы (44): $\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k^{(e)}) = \dfrac{d\overline{L}_O}{dt}$, получим $\overline{M}_O^{(u)} = -\dfrac{d\overline{L}_O}{dt}$,

$$M_z^{(u)} = -\frac{dL_z}{dt}.$$

40. Приведение сил инерции для различных видов движения

В случае ***поступательного*** движения тела силы инерции, действующие на его точки, образуют систему параллельных сил, так как ускорения всех точек тела равны по величине и направлению, например, ускорению центра масс тела - $\bar{a}_C$. Система параллельных сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех сил системы и приложена в центре масс тела. ***В случае поступательного движения силы инерции приводятся к одной силе:***

$$\bar{R}^{(u)} = -\sum m_k \bar{a}_C = -M\bar{a}_C.$$

В случае ***вращательного*** движения тела, обладающего плоскостью материальной симметрии, вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через центр масс тела, силы инерции могут быть приведены к паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения:

$$M_{Cz}^{(u)} = -\frac{dL_{Cz}}{dt}.$$

Учитывая, что: $L_{Cz} = J_{Cz}\omega$, находим, что в этом случае силы инерции могут быть приведены к паре сил, с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно оси вращения:

$$M_{Cz}^{(u)} = -J_{Cz}\frac{d\omega}{dt} = -J_{Cz}\varepsilon.$$

В случае когда ось вращения Oz не проходит через центр масс тела, силы инерции приводятся к силе $\bar{R}^{(u)} = -M\bar{a}_C$, приложенной в точке O, и паре сил с моментом $M_{Oz}^{(u)} = -J_{Oz}\varepsilon$, лежащей в плоскости симметрии тела.

При ***плоском*** движении тела, имеющего плоскость симметрии и движущегося параллельно этой плоскости, силы инерции приводятся к силе, приложенной в центре масс тела и равной главному вектору сил инерции $\bar{R}^{(u)} = -M\bar{a}_C$, и паре сил с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно оси, проходящей через центр масс:

$$M_{Cz}^{(u)} = -J_{Cz}\frac{d\omega}{dt} = -J_{Cz}\varepsilon.$$

41. Принцип возможных перемещений

Определение: **возможным называется бесконечно малое перемещение системы, которое допускают наложенные на нее связи.** На рис. 27 показано возможное перемещение системы.

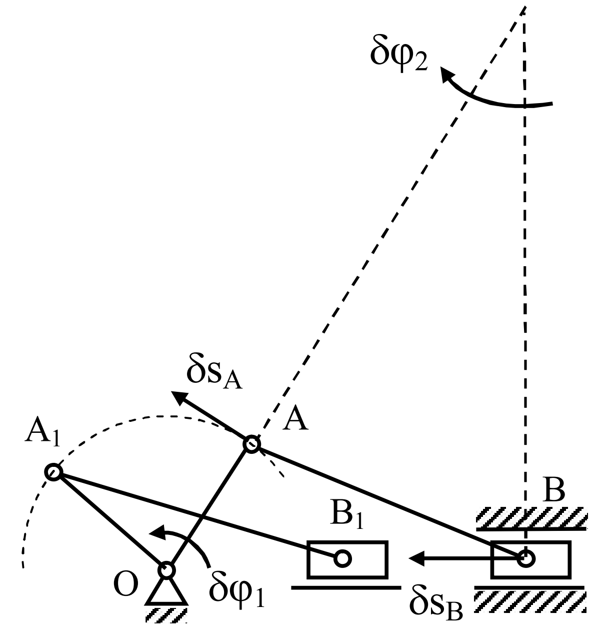

Рис. 27

Направление возможных перемещений совпадает с направлением скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма. Перемещение из положения OAB в положение OA_1B_1 не является возможным, так как оно конечное.

Определение: **связь называется идеальной, если работа ее реакции на любом возможном перемещении равна нулю (например, гладкая поверхность).**

Для равновесия системы с идеальными двухсторонними связями необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил, действующих на нее, на любом возможном перемещении равнялась нулю:

$$\sum \delta A_k^{(a)} = 0 . \tag{53}$$

42. Общее уравнение динамики

Если к активным силам, действующим на систему с идеальными связями добавить силы инерции, то сумма работ этих сил на любом возможном перемещении будет равна нулю:

$$\sum \delta A_k^{(a)} + \sum \delta A_k^{(u)} = 0 . \tag{54}$$

Общее уравнение динамики является суммой двух принципов: принципа Даламбера и принципа возможных перемещений. Действительно, если к неуравновешенной системе сил, действующей на механическую систему, добавить силы инерции, то согласно принципу Даламбера такая система сил будет уравновешенной и, следовательно, согласно принципу возможных перемещений

$$\sum \delta A_k^{(a)} + \sum \delta A_k^{(u)} + \sum \delta A_k^{(r)} = 0 . \tag{55}$$

Но, поскольку связи, наложенные на систему, являются идеальными, то сумма работ их реакций на любом возможном перемещении равна нулю: $\sum \delta A_k^{(r)} = 0$. С учетом этого формула (55) примет вид (54).

43. Уравнение Лагранжа II рода

Уравнение Лагранжа II рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{57}$$

Здесь обозначено: T – кинетическая энергия системы; $\dot{q}_i, q_i$ – соответственно обобщенная скорость и обобщенная координата. Скорость и координата называются обобщенными, поскольку могут быть как линейными, так и угловыми. Q_i - обобщенная сила (может быть как силой, так и моментом); n – число степеней свободы системы. Число степеней свободы системы с геометрическими связями (*геометрическими называют связи, которые налагают ограничения на положение точек системы*) равно числу независимых координат, с помощью которых можно однозначно определить положение системы. В общем случае точка системы может иметь бесконечное число возможных перемещений, но всегда найдется несколько возможных перемещений, через которые можно линейно выразить все остальные. Именно они и называются независимыми. Например, любое перемещение точки на плоскости можно выразить через два перемещения, соответствующие координатам x и y. Таким образом, точка на плоскости имеет две степени свободы. Вращающееся тело имеет одну степень свободы, так как его положение можно однозначно определить, задав всего одно перемещение – угол поворота. Обобщенную силу находят по формуле:

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}\,,$$

где δA_i - работа сил, действующих на систему на возможном перемещении, при котором изменяется только обобщенная координата q_i.

Например, для точки на рис. 28 обобщенные силы, соответствующие координатам x и y можно найти по формулам:

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = \frac{F \cdot \cos\alpha \cdot \delta x}{\delta x} = F \cdot \cos\alpha\,,$$

$$Q_y = \frac{\delta A_y}{\delta y} = \frac{F \cdot \sin\alpha \cdot \delta y}{\delta y} = F \cdot \sin\alpha\,.$$

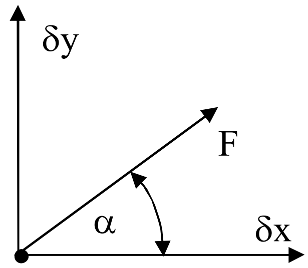

Рис. 28