1.1. Аксиомы статики

1. Аксиома: *две силы можно приложить к телу или отбросить, не изменяя оказываемого действия, если они равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия.*

Линией действия силы называется прямая, определяемая точкой приложения силы и ее направлением.

Следствие: силу можно переносить вдоль линии ее действия.

Доказательство: пусть в точке А (рис. 1) приложена сила $\overline{F}$. Приложим в точке В, лежащей на линии действия силы $\overline{F}$, две равные по величине силе $\overline{F}$ и направленные в противоположные стороны силы, линии действия которых совпадают с линией действия силы $\overline{F}$. Тогда по первой аксиоме сила $\overline{F}$ эквивалентна $\overline{F}$, $\overline{F}^{/}$, $\overline{F}^{//}$. По той же аксиоме силы $\overline{F}^{/}$ и $\overline{F}$ можно отбросить. В результате будем иметь одну силу $\overline{F}^{//}$, приложенную в точке В и равную $\overline{F}$. Что и требовалось доказать.

Таким образом, сила — скользящий вектор.

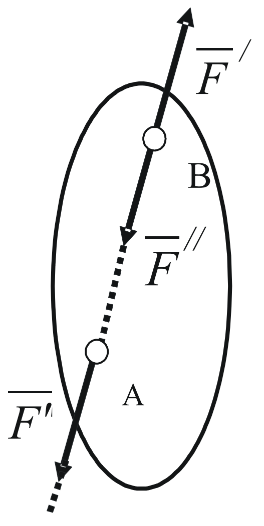

Рис. 1

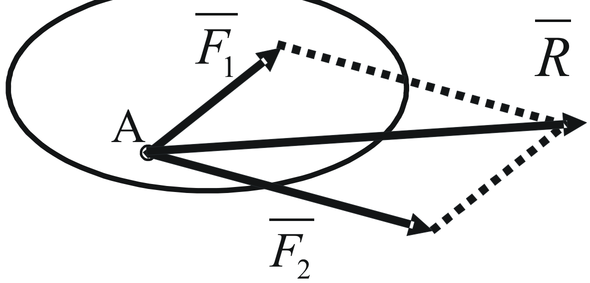

Рис. 2

2. Аксиома параллелограмма сил. *Две силы, приложенные в одной точке, можно заменить одной силой, равной их геометрической сумме и приложенной в той же точке* (рис. 2).

Сила $\overline{R}$, эквивалентная данной системе $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ сил, называется равнодействующей. Две системы называются эквивалентными (~), если одну из них можно получить из другой с помощью 1 и 2 аксиомы.

3. Аксиома равенства действия и противодействия. *При всяком взаимодействии силы действия и противодействия равны по величине, имеют общую линию действия и направлены в противоположные стороны.*

4. Принцип затвердеваемости. *Равновесие деформируемого тела не нарушится, если представить его как абсолютно твердое.*

1.2. Проекция силы на ось

Сила — вектор. Действие силы на тело определяется точкой приложения, направлением и величиной силы. Силу можно переносить вдоль линии ее действия (следует из аксиомы 1).

Силы бывают: *сосредоточенные, распределенные, активные* и *пассивные*.

Распределенная нагрузка (рис. 3) задается ее интенсивностью q. *Интенсивность* — сила, отнесенная к соответствующей геометрической единице (м; м^2; м^3).

Сила может быть распределена по линии (рис. 3), по площади или по объему (н/м, н/м^2, н/м^3). *Распределенную* нагрузку заменяют сосредоточенной силой, равной площади эпюры нагрузки и приложенной в центре ее тяжести. Например, если L = 2 м, а q = 5 кН/м, то $Q = q \cdot L$ = 10 кН.

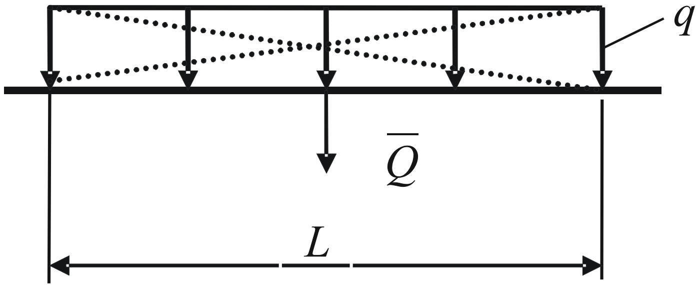

Рис. 3

Проекцией силы на ось называется алгебраическая величина, равная длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось (рис. 4).

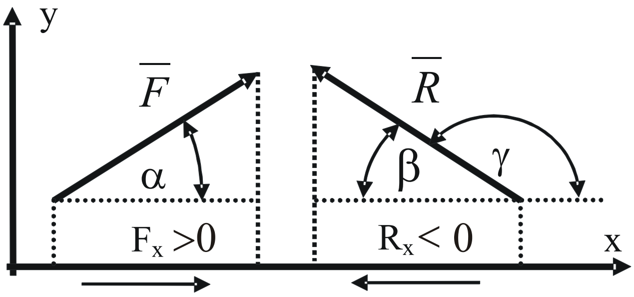

Рис. 4

Проекция положительна, если проход от проекции начала к проекции конца совпадает с положительным направлением оси. Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси: $F_x = F\ cos\alpha$, $R_x = R\ cos\beta = -R\ cos\ \gamma$.

1.3. Связи и их реакции

Тела, ограничивающие перемещение рассматриваемого тела в том или ином направлении, называются *связями*. Силы, с которыми эти связи действуют на тело, называются *реакциями*. Эти силы пассивны, они возникают только при наличии активных (заданных) сил. Для их определения пользуются *принципом освобождаемости*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие на тело соответствующими силами, которые называются *реакциями связей*.

Виды связей

Гладкая поверхность (рис. 5) — ее реакция *N*, *R1*, *R2*, *R3* направлена по общей нормали к телу и поверхности.

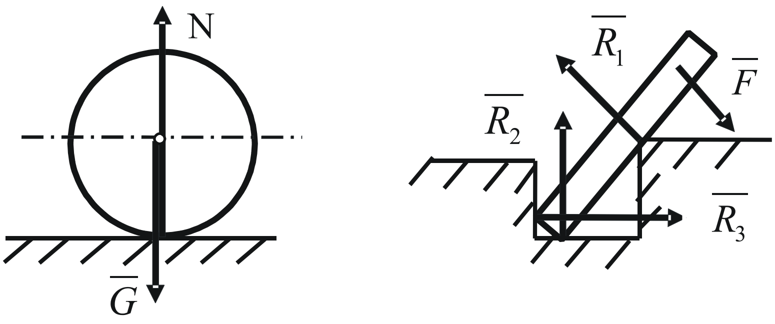

Рис. 5

Гибкая нить (рис. 6) — ее реакция *T* направлена по касательной к нити в точке ее соединения с телом. У прямолинейной нити — вдоль нити (рис. 7).

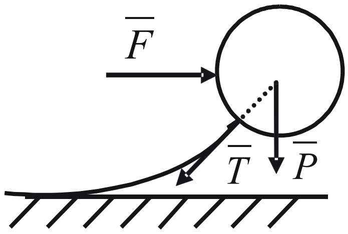

Рис. 6

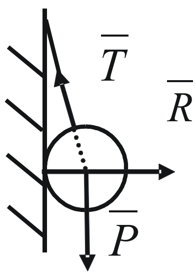

Рис. 7

Невесомый стержень — его реакция направлена вдоль линии, соединяющей концы стержня (рис. 8). Принято вначале реакцию направлять во внутрь стержня, т.е. считать его растянутым.

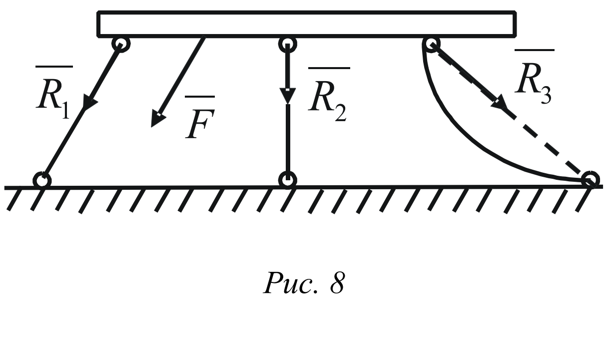

Рис. 8

Подвижный шарнир — реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно к поверхности, на которой он находится (рис. 9, в точке В).

Неподвижный шарнир — его реакция состоит из двух составляющих, направленных вдоль осей координат (рис. 9, в точке А).

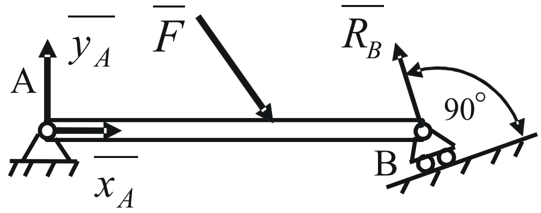

Рис. 9

Жесткая заделка — ее реакция состоит из двух составляющих, направленных вдоль осей координат и момента сил реакций (рис. 10).

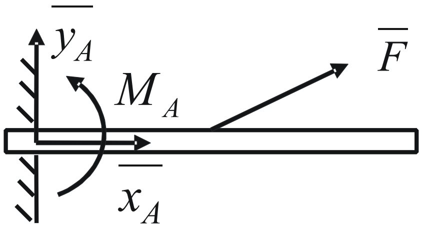

Рис. 10

Скользящая заделка (с одной степенью свободы) — ее реакция состоит из силы, направленной перпендикулярно направляющим и момента сил реакций (рис. 11).

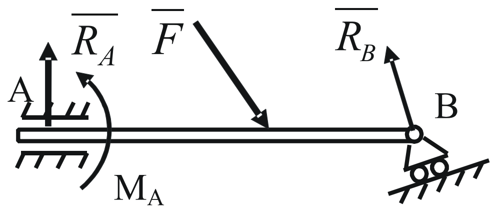

Рис. 11

Скользящая заделка (с двумя степенями свободы) — ее реакция состоит из момента сил реакций (рис. 12).

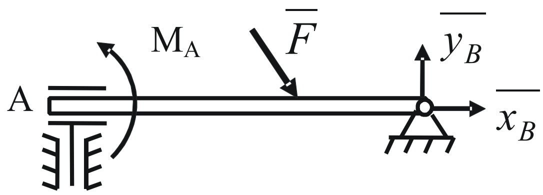

Рис. 12

1.4. Уравнения равновесия сходящейся системы сил

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке. Сходящаяся система эквивалентна одной силе, равной их геометрической сумме. Эта сила называется *равнодействующей*.

Так как $\overline{R} = \left|\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right|$, то для того чтобы модуль равнодействующей $\overline{R}$ был равен нулю, необходимо, чтобы одновременно выполнялось три равенства:

$$\begin{cases} R_x = 0; \\ R_y = 0; \\ R_z = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum Fkx = 0; \\ \sum Fky = 0; \\ \sum Fkz = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \\ \sum z = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Это и есть *уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил.*

Если система сил плоская сходящаяся и все силы лежат в плоскости *xy*, то последнее уравнение системы (1) выполняется тождественно, и уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{cases} \sum Fkx = 0; \\ \sum Fky = 0. \end{cases}$$

Это и есть *уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил*.

1.5. Теорема о трех силах

Теорема: *если тело под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке*.

Доказательство: пусть на тело действуют три силы (рис. 13), две из которых пересекаются, тогда $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3 \sim \overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_3'$ по следствию из первой аксиомы, а $\overline{F}_1', \overline{F}_2', \overline{F}_3' \sim \overline{R}, \overline{F}_3$ — по второй аксиоме.

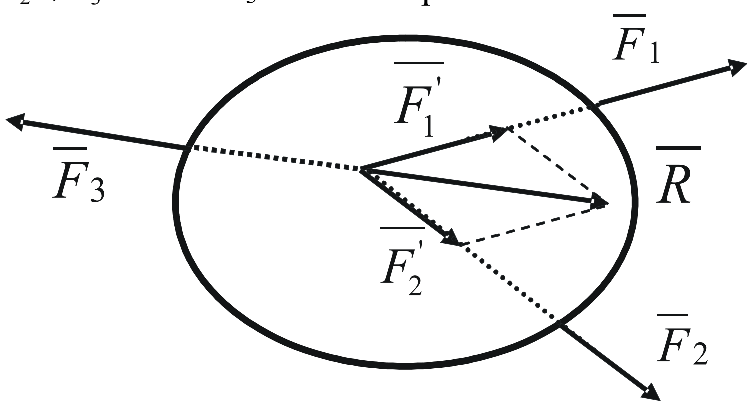

Рис. 13

Знак ~ обозначает эквивалентность систем. Но по условию система ~ 0, следовательно, по третьей аксиоме силы $\overline{R}$ и $\overline{F}_3$ равны по величине и имеют общую линию действия. Что и требовалось доказать.

1.6. Пара сил. Свойства сил

Система, состоящая из двух равных по величине и противоположно направленных сил, линии действия которых не совпадают, называется *парой сил* (рис. 14).

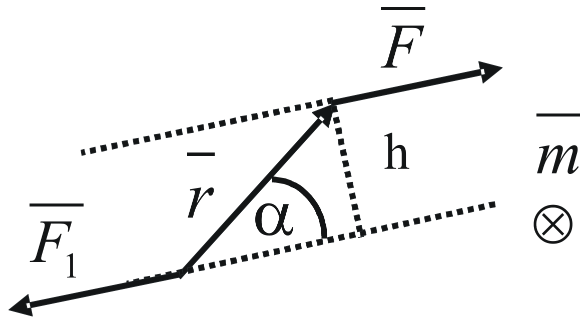

Рис. 14

Действие пары на тело определяется моментом пары. Момент пары — это вектор, равный векторному произведению радиуса вектора, проведенного из точки приложения одной силы в точку приложения другой, на вектор последней силы: $\overline{m} = \overline{r} \times \overline{F}$. Векторное произведение двух векторов — это вектор, направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора, в ту сторону, откуда вращение от 1-го вектора ко 2-му по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки. Модуль векторного произведения равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними, тогда:

$$|\overline{m}| = |\overline{r}||\overline{F}| \sin\alpha = |\overline{F}|h, \qquad \text{т.к.} \quad |\overline{r}| \sin\alpha = h.$$

Можно дать другое определение: момент пары — это вектор, направленный перпендикулярно плоскости действия пары, в ту сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки. В примере (см. рис. 14) вектор момента $\overline{m}$ направлен от нас (направление от нас изображается $\otimes$, а направление на нас — $\odot$). Величина момента равна произведению модуля одной из сил пары на плечо.

Плечо h — расстояние между линиями действия сил пары.

Свойства пар:

1. У пары можно произвольно менять силы и плечо, оставляя при этом неизменным момент пары.
2. Пару можно переносить в плоскости ее действия.
3. Пару можно переносить в плоскость, параллельную плоскости ее действия.

Момент пары — это свободный вектор, т.е. его можно изображать где угодно. Если на тело действует несколько пар, то их можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов этих пар.

1.7. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки характеризует вращательный эффект силы.

Момент силы $\overline{F}$ относительно центра О равен векторному произведению радиуса вектора, проведенного из центра О в точку приложения силы, на вектор этой силы (рис. 15): $\overline{m}_O\left(\overline{F}\right) = \overline{r} \times \overline{F}$ **.**

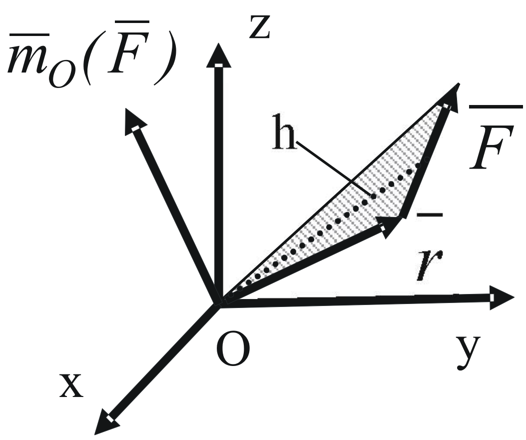

Рис. 15

Величина момента: $|\overline{m}_O(\overline{F})| = |\overline{r}|\,|\overline{F}|\,\sin\alpha = |\overline{F}|\,h$, где величина h — *плечо силы* (кратчайшее расстояние от центра О до линии действия силы). Понятие момента как вектора используется при решении пространственных задач.

Если все силы лежат в одной плоскости, то моменты сил будут направлены перпендикулярно этой плоскости. Поэтому в этом случае достаточно определения момента как алгебраической величины (т.е. величины со знаком): момент силы равен произведению силы на плечо и имеет знак (+), если сила поворачивает тело вокруг центра против часовой стрелки (рис. 16).

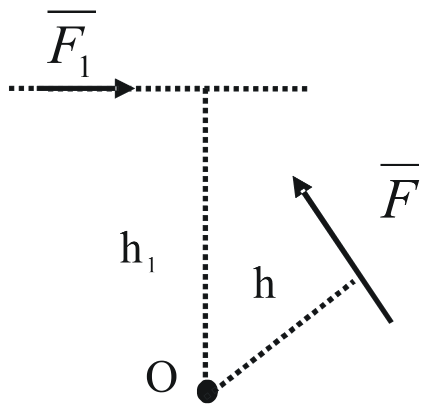

Рис. 16

Тогда: $m_O(\overline{F}) = F \cdot h$; $m_O(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot h_1$.

1.8. Теорема Вариньона

Теорема: *если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра равен сумме моментов составляющих относительно того же центра.*

Доказательство: пусть (рис. 17) система $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ имеет равнодействующую $\overline{R}$. Приложим к телу силу $\overline{R'} = -\overline{R}$, тогда система $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$, $\overline{R'} \sim 0$, следовательно, сумма моментов всех сил системы относительно любого центра О будет равна 0, т.е.: $\sum \overline{m}_O(\overline{F_k}) + \overline{m}_O(\overline{R'}) = 0$.

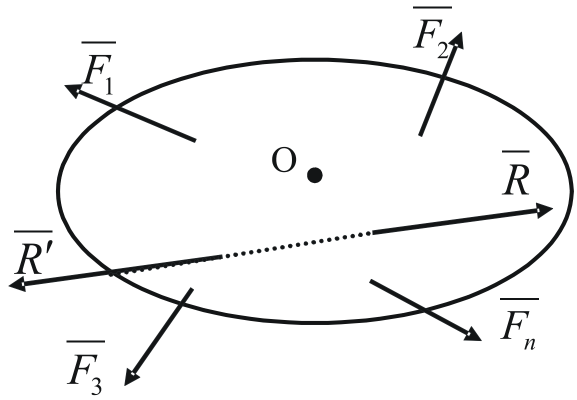

Рис. 17

Но $\overline{m}_O(\overline{R'}) = -\overline{m}_O(\overline{R})$, тогда $\sum \overline{m}_O(\overline{F_k}) - \overline{m}_O(\overline{R}) = 0$. Следовательно, $\overline{m}_O(\overline{R}) = \sum \overline{m}_O(\overline{F_k})$. Что и требовалось доказать.

1.9. Теорема о параллельном переносе силы

Теорема: *силу можно переносить из данной точки в любую другую, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.*

Доказательство: пусть в точке А (рис. 18) приложена сила $\overline{F}$.

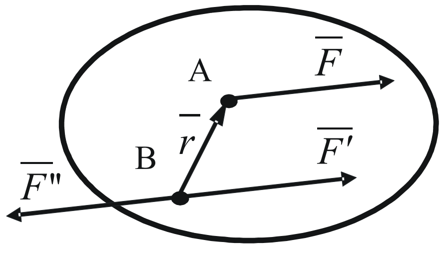

Рис. 18

Приложим в точке В силы $\overline{F'}$ и $\overline{F''}$, равные, параллельные силе $\overline{F}$ и направленные в противоположные стороны (это можно сделать по первой аксиоме). Тогда систему сил $\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$ можно рассматривать как силу $\overline{F'}$, равную $\overline{F}$ и приложенную в точке В, и пару сил $\overline{F}$, $\overline{F''}$, момент которой равен моменту силы $\overline{F}$ относительно точки В: $\overline{m}(\overline{F}, \overline{F''}) = \overline{m}_B(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$. Что и требовалось доказать.

1.10. Основная теорема статики

Определение: *главным вектором системы сил называется вектор, равный геометрической сумме сил системы:* $\overline{R} = \sum \overline{F_k}$.

Определение: *главным моментом системы относительно центра О называется вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этого центра:* $\overline{M}_O = \sum \overline{m}_O(\overline{F_k})$.

Статика решает две задачи:

а) задача о равновесии (каким условиям должна удовлетворять система сил, для того чтобы тело под ее действием находилось в равновесии);

б) задача о приведении (как данную систему сил заменить другой, в частности заменить простой).

Вторую задачу статики решает основная теорема статики: *любую систему сил можно заменить одной силой, равной главному вектору и приложенной в центре приведения, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту относительно центра приведения.*

Доказательство: пусть на тело (рис. 19) действует система сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$. Выберем произвольно т. О — центр приведения. По теореме о параллельном переносе, каждую из сил можно перенести в центр О, добавив при этом соответствующую пару сил.

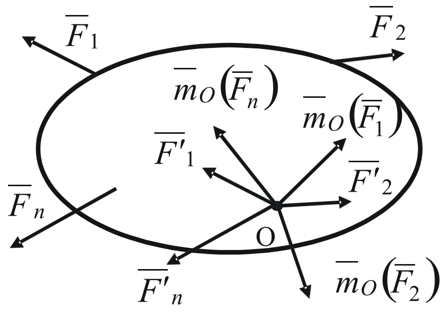

Рис. 19

В результате, перенеся все силы в точку О, получим систему сил, приложенных в т. О, и систему пар сил с моментами, равными моментам сил системы относительно центра О. Сложив все силы, приложенные к центру О, получим главный вектор системы $\overline{R}$. Сложив все моменты пар сил, получим главный момент $\overline{M}_O$. Таким образом, данную систему сил заменили одной силой $\overline{R}$ и одной парой сил с моментом $\overline{M}_O$, что и требовалось доказать.

1.11. Случаи приведения

1. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система сил эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.
2. $\overline{R} = 0$, $\overline{M}_O \neq 0$. Система приводится к паре сил. При этом главный момент не зависит от выбора центра приведения.
3. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O = 0$. Система приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения.
4. $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_O \neq 0$.

а) $\overline{R} \perp \overline{M}_O$. Система приводится к равнодействующей, лежащей на расстоянии $h = |\overline{M}_O| \,/\, |\overline{R}|$ от центра приведения (рис. 20);

б) $\overline{R} \parallel \overline{M}_O$. В этом случае говорят, что система приводится к динаме (рис. 21).

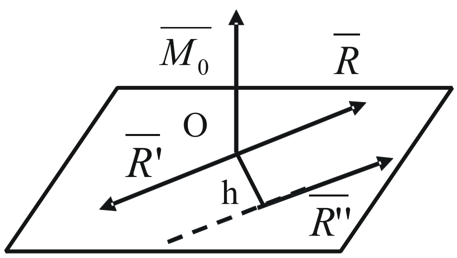

Рис. 20

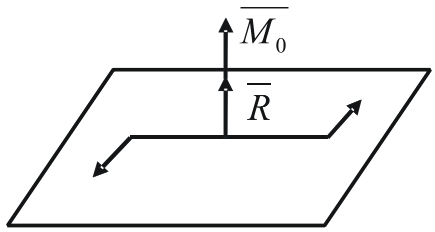

Рис. 21

Во всех остальных случаях система может быть приведена к динаме. Под действием динамы тело совершает винтовое движение.

1.12. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная проекции момента силы относительно точки, лежащей на оси, на эту ось (рис. 22).

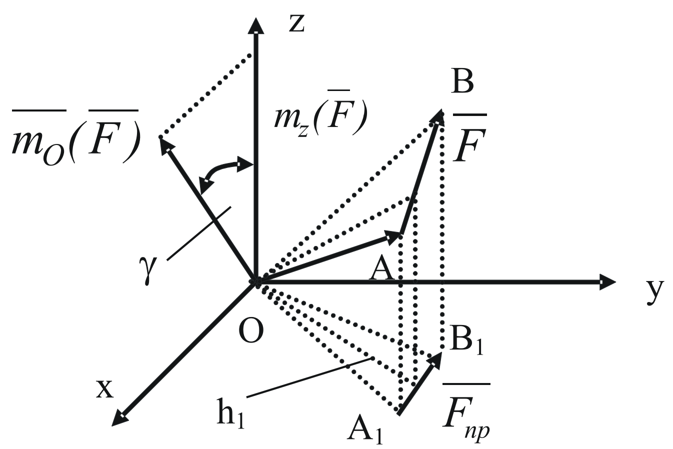

Рис. 22

Таким образом: $m_z(\overline{F}) = |\overline{m}_O(\overline{F})| \cos\gamma$.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде определителя. Тогда, разложив его по элементам первой строки, получим:

$$\overline{m}_O\left(\overline{F}\right)=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)\,\bar{i}+(z\cdot F_x-x\cdot F_z)\,\bar{j}+(x\cdot F_y-y\cdot F_x)\,\bar{k}.$$

С другой стороны: $\overline{m}_O(\overline{F})=m_x\left(\overline{F}\right)\bar{i}+m_y\left(\overline{F}\right)\bar{j}+m_z\left(\overline{F}\right)\bar{k}$.

Сравнивая эти формулы, получаем:

$$m_x\left(\overline{F}\right)=y\cdot F_z-z\cdot F_y;$$
$$m_y\left(\overline{F}\right)=z\cdot F_x-x\cdot F_z;$$
$$m_z\left(\overline{F}\right)=x\cdot F_y-y\cdot F_x.$$

При решении задач удобно определять момент силы относительно оси по следующему правилу: *момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси и плоскости.* То есть: $m_z(\overline{F})=m_O(\overline{F}_{np})=\overline{F}_{np}\cdot h_1$.

Вывод: момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси ($F_{np}=0$) или сила пересекает ось ($h_1=0$). Оба эти случая можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Геометрически момент силы относительно центра О равен удвоенной площади ΔОАВ, а относительно оси z — удвоенной площади ΔОА$_1$В$_1$.

1.13. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялось два равенства:

$\overline{R}=0$; $\overline{M}_O=0$.

Поскольку $|\overline{R}|=\sqrt{Rx^2+Ry^2+Rz^2}$, а $|\overline{M_0}|=\sqrt{Mx^2+My^2+Mz^2}$, то для того чтобы выполнялись эти равенства, необходимо, чтобы одновременно выполнялось шесть уравнений:

$$\begin{cases}\sum Rx=0;\\ \sum Ry=0;\\ \sum Rz=0;\\ \sum Mx=0;\\ \sum My=0;\\ \sum Mz=0;\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sum Fkx=0;\\ \sum Fky=0;\\ \sum Fkz=0;\\ \sum m_x(\overline{F_k})=0;\\ \sum m_y(\overline{F_k})=0;\\ \sum m_z(\overline{F_k})=0.\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}\sum X=0;\\ \sum Y=0;\\ \sum Z=0;\\ \sum m_x=0;\\ \sum m_y=0;\\ \sum m_z=0.\end{cases}$$

Это и есть *уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.*

Если линии действия всех сил системы параллельны, то, выбрав ось Z так, чтобы она была параллельна линиям действия сил, получим, что первые два и последние уравнения системы выполнятся тождественно, тогда останутся три уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F_k}) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F_k}) = 0. \end{cases}$$

Это и есть *уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил.*

1.14. Уравнение равновесия плоской произвольной системы сил

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо, чтобы $\overline{R} = 0$ и $M_O = 0$, а для этого должны выполняться три равенства:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum m_O(\overline{F_k}) = 0. \end{cases}$$

При решении задач их записывают в виде:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0. \end{cases}$$

Это и есть *уравнение равновесия произвольной плоской системы сил*.

Имеется два других вида уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$ — здесь ось x не $\perp$ AB.

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases}$$ — здесь точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Если линии действия всех сил плоской системы параллельны, то система сил называется плоской системой параллельных сил.

Выберем ось X так, чтобы она была перпендикулярна линиям действия сил. Тогда уравнение $\sum X = 0$ выполняется тождественно. В результате получим два вида *уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:*

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0; \end{cases} \text{или} \qquad \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$

1.15. Равновесие системы тел

Иногда приходится решать задачи о равновесии нескольких тел, связанных между собой связями, которые называются *внутренними*, в отличие от внешних связей, связывающих рассматриваемую систему тел с другими телами. На рисунке 23: D — внутренняя связь, A, B, C — внешние связи.

Для решения задачи в этом случае необходимо составить три уравнения равновесия для всей системы в целом (см. рис. 23) и три уравнения для какой-либо ее части, например, DC (рис. 24). В результате будем иметь шесть уравнений, из которых можно определить 6 неизвестных x_A, y_A, R_B, R_C, x_D, y_D.

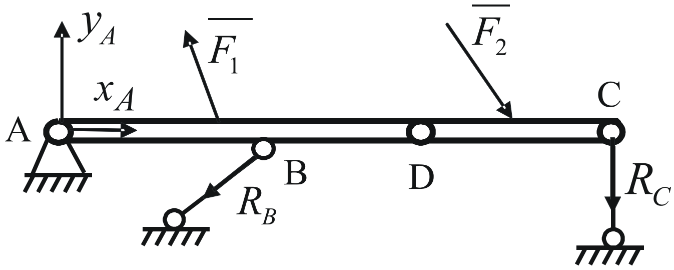

Рис. 23

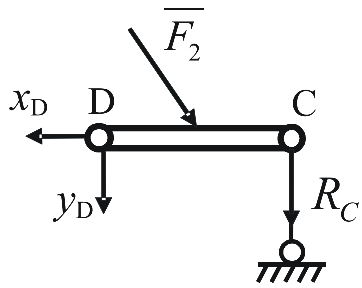

Рис. 24

Три уравнения для другой части AD будут уравнениями проверки. Здесь следует учесть, что сила, с которой правая часть балки действует на левую, равна и противоположно направлена силе, с которой левая часть балки действует на правую (по аксиоме равенства действия и противодействия).

Задачу можно решить и по-другому: составив по три уравнения для левой и правой частей. Тогда три уравнения для всей балки будут проверкой.

Если система состоит из n — тел, то можно составить $3n$ уравнений и определить $3n$ неизвестных. Если неизвестных больше, то задача называется статически неопределимой; если меньше, то система не будет жесткой.

1.16. Расчет ферм

Фермой называется конструкция, состоящая из невесомых стержней, соединенных между собой шарнирами. Места соединения стержней фермы называются узлами. У статически определимой фермы число узлов n и число стержней k удовлетворяют равенству: $k = 2n - 3$. Расчет фермы заключается в определении внешних реакций связей и определении усилий в стержнях фермы.

Методом вырезания узлов пользуются в том случае, если требуется определить усилия во всех стержнях фермы. Если требуется определить усилия в каком-то конкретном стержне, то используют метод сечений (Риттера).

Метод вырезания узлов заключается в том, что последовательно вырезают и рассматривают равновесие таких узлов фермы, в которых сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями.

Метод сечений заключается в том, что ферму рассекают линией, пересекающей не более трех стержней с неизвестными усилиями, и рассматривают равновесие той части фермы, которая проще.

1.17. Центр параллельных сил. Центр тяжести

Центром параллельных сил называется точка С, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил при любом повороте всех сил системы в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

Найдем координаты т. С (рис. 25).

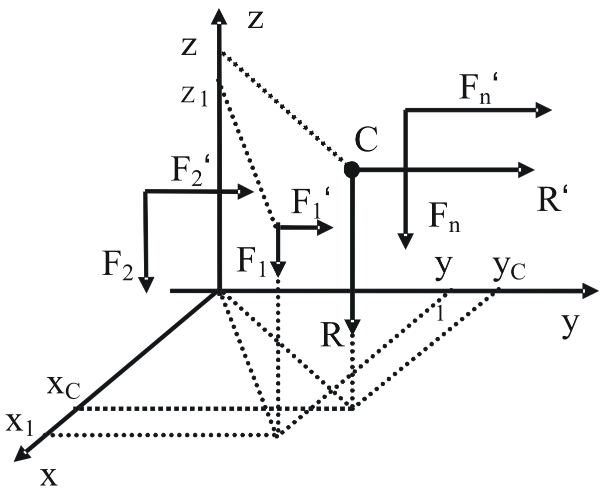

Рис. 25

Поскольку $m_x(\overline{R}) = \sum m_x(\overline{F}_k)$, то $-R \cdot y_c = -F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - ... - F_n \cdot y_n$.

Отсюда находим: $y_C = (\sum F_k \cdot y_k)/R = (\sum F_k \cdot y_k)/\sum F_k$, где y_k — координата *y*, точки приложения силы F_k. Аналогично определяем координату x_C: $m_y(R) = \sum m_y(F_k)$, или $R \cdot x_c = \sum F_k \cdot x_k$.

Тогда $x_c = (\sum F_k \cdot x_k)/\sum F_k$.

Для определения z_C повернем все силы системы так, чтобы они стали параллельны оси *y*, тогда $m_x(R') = \sum m_x(F'_k)$ или $-R' \cdot z_C = -\sum F'_k \cdot z_k$. Отсюда находим: $z_C = (\sum F_k \cdot z_k)/\sum F_k$.

Силы тяжести, действующие на тело, можно приближенно считать системой параллельных сил. Центр системы сил тяжести называется центром тяжести.

О п р е д е л е н и е: *центром тяжести называется точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести тела при любом повороте тела.*

Для определения положения координат центра тяжести тела можно использовать формулы, ранее полученные для определения координат центра параллельных сил.

Если тело неоднородно, то, разбивая его на несколько простых тел, у которых легко определить координаты центра тяжести, получим формулы для определения координат центра тяжести неоднородного тела:

$$\begin{cases} x_C = (\sum P_k x_k)/\sum P_k \\ y_C = (\sum P_k y_k)/\sum P_k \\ z_C = (\sum P_k z_k)/\sum P_k \end{cases}, \tag{2}$$

где P_k — сила тяжести части тела с номером *k*.

Если тело однородное, то:

$$P_k = V_k \cdot \rho\,, \tag{3}$$

где V_k — объем тела с номером *k*;

ρ — удельный вес.

В этом случае говорят о центре тяжести объема. Подставив (3) в (2) и сократив на ρ, получим формулы, аналогичные (2), в которых вместо P_k будет стоять V_k.

Если у тела два размера много больше третьего, то говорят о центре тяжести поверхности, в этом случае:

$$P_k = V_k \cdot \rho = S_k \cdot h \cdot \rho\,, \tag{4}$$

где S_k — площадь части тела с номером *k*;

h — толщина.

Если h = const, то, подставив (4) в (2), получим аналогичные формулы, в которых вместо P будет стоять S.

Если у тела один размер много больше двух других, то говорят о центре тяжести линии. В этом случае, если площадь сечения S постоянна:

$$P_k = V_k \cdot \rho = S \cdot L_k \cdot \rho\,, \tag{5}$$

где L_k — длина участка с номером *k*.

Подставляя (5) в (2), получим формулы, аналогичные (2), в которых вместо P будет стоять L.

1.18. Аналитические и экспериментальные методы определения положения центра тяжести

1. М е т о д р а з б и е н и й. Метод заключается в том, что тело разбивают на несколько простейших тел, у которых известно положение центра тяжести, и используют формулы типа (2).

2. Метод отрицательных площадей. Заключается в том, что данное тело дополняют до простейшего. При этом дополняющие вес, объем, площадь или длину считают отрицательными.

Простейшими являются тела, у которых известно положение центра тяжести. Ими являются: однородные диск и окружность — их ц.т. находится в центре; прямоугольник и параллелограмм — их ц.т. находится на пересечении диагоналей; треугольник — его ц.т. находится на пересечении медиан. При этом следует учитывать, что медианы точкой их пересечения делятся в отношении 1 : 2 (рис. 26). Положение центра тяжести кругового сектора можно определить по формуле:

$$OC = 2/3\, R\ \sin\alpha/\alpha,$$

где α — половина центрального угла, выраженного в радианах (рис. 27).

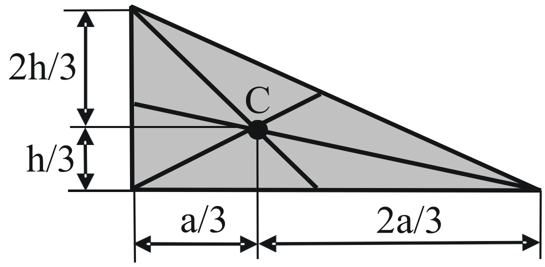

Рис. 26

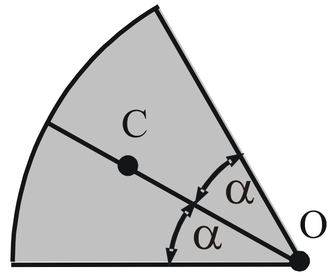

Рис. 27

Центр тяжести тела, имеющего центр, плоскость или ось симметрии, находится на них.

Среди экспериментальных способов можно отметить нижеприведенные.

3. Метод взвешивания (рис. 28). По известным весу тела P, показаниям весов R и расстоянию a определяют расстояние x из уравнения:

$$\sum m_O = -P\cdot x + R\cdot a;$$

откуда:
$$x = R\cdot a\,/\,P.$$

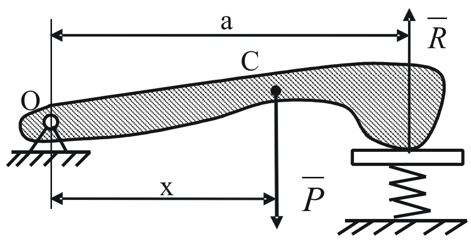

Рис. 28

4. Метод подвешивания. При этом способе тело подвешивают на нити сначала в одной точке и проводят линию, продолжающую нить, затем в другой точке, точка пересечения этих линий и дает положение центра тяжести.

1.19. Трение скольжения

При попытке сдвинуть одно тело относительно другого возникает сила, препятствующая этому. Она называется *силой трения.* Гладкая поверхность — это идеализированная поверхность, когда нет трения. Реальные поверхности шероховатые. Силу трения находят из уравнений равновесия. В предельном случае, когда тело вот-вот выйдет из состояния покоя, силу трения можно определить по формуле:

$$F_{тр} = N \cdot f,$$

где N — сила нормального давления;

f — коэффициент трения (безразмерная величина), определяется экспериментально.

Коэффициент трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей, незначительно зависит от скорости. Коэффициент трения покоя больше коэффициента трения движения и незначительно уменьшается с увеличением скорости.

Реакция шероховатой поверхности R (рис. 29) есть сумма нормальной реакции N и силы трения. Она отклонена от нормали.

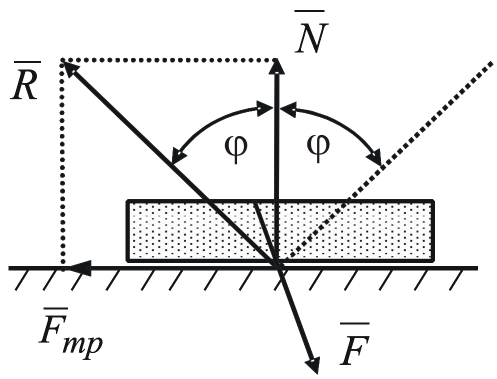

Рис. 29

Максимальный угол отклонения реакции шероховатой поверхности от нормали φ называется *углом трения.* Его можно найти по формуле:

$$tg\, \varphi = F_{тр} / N = f.$$

Если равнодействующая F внешних сил, приложенных к телу, проходит внутри угла трения, то тело не выйдет из равновесия при сколь угодно большой силе $\overline{F}$.

1.20. Трение качения

В теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. Если бы это было так, то тело (рис. 30) вышло бы из состояния покоя при сколь угодно малой силе F, т.к. сумма моментов сил, приложенных к телу, не равна 0. Но этого не происходит. В действительности, все тела деформируемы, поэтому нормальная реакция N (рис. 31) смещается в направлении действия силы на некоторое расстояние и образует вместе с силой тяжести пару сил, препятствующую качению. Максимальное смещение δ называется *коэффициентом трения качения.* Измеряется в сантиметрах. В механике, в случае если сопротивление качению необходимо учесть, тела считают абсолютно твердыми, но к ним прикладывают момент M_C (момент сопротивления качению), препятствующий качению тела (рис. 32). Величина момента сопротивления качению может быть найдена по формуле:

$$M_C = N \cdot \delta.$$

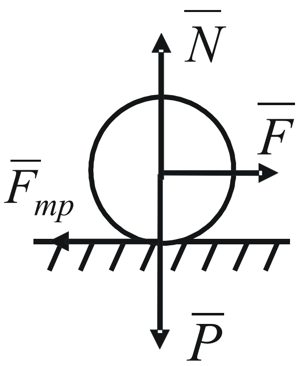

Рис. 30

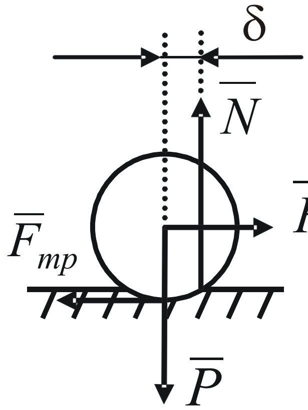

Рис. 31

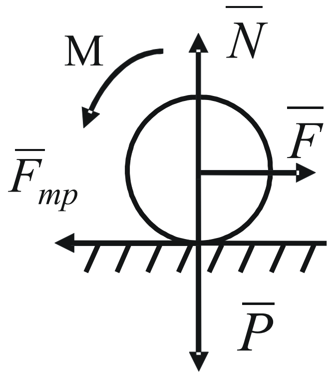

Рис. 32

Условие, при котором начинается качение, имеет вид:

$$F \cdot R \geq N \cdot \delta$$

или
$$F \geq N \cdot \delta / R,$$

здесь R — радиус колеса.

Условие, при котором начинается скольжение:

$$F \geq F_{тр} = f \cdot N.$$

Поскольку $f >> \delta/R$, то при скольжении надо приложить силу много большую, чем при качении.