Лекция 7. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Понятие непрерывной случайной величины.
2. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения), кривая распределения.
3. Интегральной функцией распределения.
4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

1. Понятие непрерывной случайной величины

- Если множество возможных значений с. в. несчетно, то такая величина называется ***непрерывной*** (н. с. в.).

То есть н. с. в. может принимать любые значения из некоторого промежутка.

2. Плотность распределения вероятностей (дифференциальная функция распределения), кривая распределения

Каждому промежутку (a,b) из множества значений н. с. в. соответствует определенная вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в это промежуток.

Вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в промежуток (a,b), определяется равенством:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ — функция, называемая ***плотностью распределения вероятностей***.

График функции $f(x)$ называется ***кривой распределения.***

Вероятность $P(a<X<b)$ того, что значение с. в. X попадает в промежуток (a,b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью *Ox* и прямыми $x=a$, $x=b$.

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

3. Интегральной функцией распределения

- ***Интегральной функцией распределения*** с. в. X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что с. в. X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x)=F'(x).$$

Функцию $f(x)$ называют также ***дифференциальной функцией распределения.***

4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

1) ***Математическое ожидание*** н. с. в.:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

В частности, если все возможные значения $X\in(a,b)$, то

$$M(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

Пример:

Непрерывная с.в. X задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ x^3 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти:

1) дифференциальную функцию распределения $f(x)$;

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$.

Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

Решение

1. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 3x^2 & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

2. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X найдем по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x<0$ и при $x>1$ равна нулю, то имеем

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=\frac{3x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}.$$

3. Дисперсию $D(X)$ определим по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Найдем математическое ожидание $M\left(X^2\right)$ по формуле

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Так как функция $f(x)$ при $x<0$ и при $x>1$ равна нулю, то имеем

$$M\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx=\frac{3x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{3}{5}.$$

Тогда

$$D(X)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$ (рис. 1, 2):

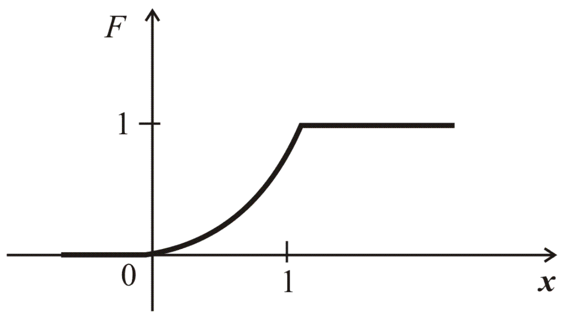

Рис. 1. График функции $F(x)$

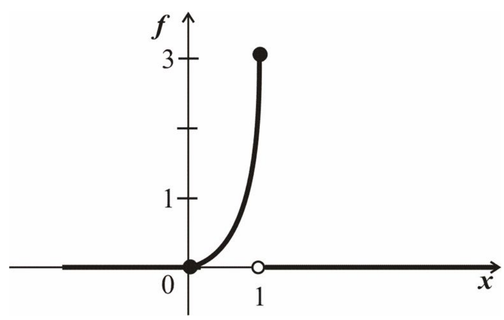

Рис. 2. График функции $f(x)$

Ответ: $M(X)=\frac{3}{4}$, $D(X)=\frac{3}{80}$.