Лекция 7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

- Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q — действительные числа, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***.
- ***Характеристическим уравнением*** для уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$, квадратное относительно k.

В зависимости от знака дискриминанта $D = p^2 - 4q$ возможны ***три случая***:

1) $D > 0$, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня k_1 и k_2. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) $D = 0$, характеристическое уравнение имеет два совпадающих действительных корня $k_1 = k_2 = k$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

3) $D < 0$, характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тогда общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

■ ***Пример.*** Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 5k + 6 = 0$. Его корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Поэтому общее решение данного уравнения $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

■ ***Пример.*** Найти общее решение уравнения $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 10k + 25 = 0$. Оно имеет два совпадающих корня $k = 5$. Поэтому общее решение данного уравнения $y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}$.

■ ***Пример.*** Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 13 = 0$; $D = -36$. Оно имеет два комплексных сопряженных корня $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = -2 \pm 3i$. Поэтому общее решение данного уравнения $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

■ ***Пример.*** Найти частное решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

Решение. Найдем сначала общее решение данного уравнения. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 3 = 0$. Оно имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Тогда общее решение данного уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Найдем производную от общего решения: $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$. Подставим начальные условия $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ в общее решение и его производную, получим систему относительно C_1 и C_2: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 6, \\ C_1 + 3C_2 = 10 \end{cases}$. Решая ее, находим $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = 4e^x + 2e^{3x}$.