Лекция 6. Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия). Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия).
2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

1. Дифференциальные уравнения второго порядка (основные понятия)

Дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$ или вида $y'' = f(x, y, y')$.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, обращающая уравнение в тождество при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

Решение уравнения второго порядка, получаемое из общего решения при фиксированных значениях постоянных C_1 и C_2, называется ***частным решением*** уравнения. Частное решение уравнения второго порядка находят из общего его решения заданием ***начальных условий***: $y_0 = y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

14.8. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений второго порядка, сводящихся к уравнениям первого порядка.

1 тип: $y'' = f(x)$.

Особенность: уравнение не содержит y, y'.

Способ решения: $\dfrac{dy'}{dx} = f(x)$,

$$dy' = f(x)dx,$$

$$\int dy' = \int f(x)dx,$$

$$y' = \varphi_1(x) + C_1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + C_1,$$

$$dy = (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$

$$\int dy = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx,$$

$$y = \varphi_2(x) + C_1x + C_2.$$

Пример:

Решить уравнение $y'' = \cos x + \sin x$.

Решение. $y' = \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C_1$,

$y = \int (\sin x - \cos x + C_1) dx = -\cos x - \sin x + C_1 x + C_2$.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз.

2 тип: $y'' = f(x, y')$.

<u>Особенность:</u> уравнение не содержит явным образом y.

<u>Способ решения</u>: замена $y' = p$, где $p = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. В результате уравнение приводится к уравнению $p' = f(x, p)$ — уравнению первого порядка относительно p. Найдем его общее решение $p = \varphi(x, C_1)$, т.е. $y' = \varphi(x, C_1)$. Тогда $y = \int \varphi(x, C_1) dx$. Получим общее решение данного уравнения.

Пример:

Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Решение. Уравнение не содержит явным образом y.

Замена: $y' = p$, где $p = p(x)$.

Тогда $y'' = p'$.

Получим $p' = \dfrac{p}{x}$,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x},$$

$$dp = \frac{p}{x} dx,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = \ln C_1 |x|,$$

$$p = C_1 x,$$

$$y' = C_1 x,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x,$$

$$dy = C_1 x dx,$$

$$\int dy = \int C_1 x dx,$$

$$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

3 тип: $y'' = f(y, y')$.

<u>Особенность:</u> уравнение не содержит явным образом x.

<u>Способ решения:</u> Замена: $y' = g$, где $g = g(y)$.

Тогда по правилу производной сложной функции $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g\frac{dg}{dy}$.

Получим уравнение первого порядка $g\frac{dg}{dy} = f(y, g)$. Из него найдем общее решение $g = \varphi(y, C_1)$, $y' = \varphi(y, C_1)$. Из последнего уравнения найдем *y*.

Пример:

Найти частное решение уравнения $y''y^3 - 1 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение не содержит явным образом *x*.

Замена: $y' = g$, где $g = g(y)$. Тогда $y'' = g\frac{dg}{dy}$.

Уравнение примет вид $g\frac{dg}{dy}y^3 = 1$,

$$gy^3dg = dy,$$

$$gdg = \frac{dy}{y^3},$$

$$\int gdg = \int y^{-3}dy,$$

$$\frac{g^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1,$$

$$\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + C_1.$$

Так как $y'(0) = 1$, $y(0) = 1$, то $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + C_1$, откуда $C_1 = 1$.

Тогда $\frac{(y')^2}{2} = -\frac{1}{2y^2} + 1$,

$$(y')^2 = -\frac{1}{y^2} + 2,$$

$$(y')^2 = \frac{2y^2 - 1}{y^2},$$

$y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$ — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y},$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = dx,$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = \int dx,$$

$$\frac{1}{4}\int \left(2y^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(2y^2 - 1\right) = x,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+C_2.$$

Так как $y(0)=1$, то $\frac{1}{2}=C_2$.

Тогда $\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+\frac{1}{2}$,

$$\sqrt{2y^2-1}=2x+1,$$

$$2y^2-1=(2x+1)^2,$$

$2y^2=(2x+1)^2+1$ — частный интеграл.