Лекция 5. Уравнение Бернулли

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Уравнение Бернулли.

1. Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + p(x)y = f(x)y^n$ называется ***уравнением Бернулли***. Оно, в отличие от линейного уравнения, содержит в правой части y^n.

Разделим обе части уравнения на y^n:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = f(x),$$

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)y^{1-n} = f(x).$$

Сделаем замену6

$$z = y^{1-n},$$

$$z' = (1-n)y^{-n}y' = \frac{(1-n)y'}{y^n}.$$

Откуда

$$\frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n}.$$

В результате замены получим уравнение

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = f(x).$$

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Для его решения используем замену $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

Заметим, что практически нет необходимости вводить новую переменную z. Уравнение Бернулли можно решить с помощью замены $y = uv$, не сводя его к линейному.

Пример: Решить уравнение $y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x$.

Решение.

Данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли.

Разделим обе части уравнения на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \ln x.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{1}{y},$$

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'.$$

Из последнего равенства

$$\frac{y'}{y^2} = -z'.$$

Тогда данное уравнение преобразуется к виду:

$$-z' + \frac{1}{x} \cdot z = \ln x,$$

$$z' - \frac{1}{x} \cdot z = -\ln x.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

В результате замены получим уравнение

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} \cdot uv = -\ln x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} \cdot v\right) = -\ln x.$$

Функцию v найдем из уравнения

$$v' - \frac{1}{x} \cdot v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x},$$

$$dv = \frac{v}{x} dx,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = \ln|x|,$$

$$v = x.$$

Функцию u найдем из уравнения

$$u'v = -\ln x,$$

$$u'x = -\ln x,$$

$$x\frac{du}{dx} = -\ln x,$$

$$xdu = -\ln xdx,$$

$$du = -\frac{\ln xdx}{x},$$

$$\int du = -\int \frac{\ln xdx}{x},$$

$$u = -\int \ln xd(\ln x),$$

$$u = -\frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Зная u и v, найдем z:

$$z = uv = \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)x.$$

Так как $z = \frac{1}{y}$, то получим общий интеграл данного уравнения:

$$\frac{1}{y} = \left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C \right) x.$$