Лекция 3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

1. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $y = f(x, y)$ называется ***однородной порядка n***, если для произвольного числа t выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, $f(x, y) = x^2 - xy$ — однородная функция второго порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка, называется ***однородным***.

Для решения этого уравнения следует привести его к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и сделать замену:

$$u = \frac{y}{x},$$

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u.$$

В результате замены получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = \varphi(u),$$

$$u'x = \varphi(u) - u,$$

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx,$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

В результате интегрирования получим общее решение (интеграл) дифференциального уравнения.

Однородное дифференциальное уравнение может быть в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового порядка.

Для его решения разделим обе части на dx:

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

т.е. получили уравнение предыдущего вида.

Пример: Решить уравнение $\left(x^2 - y^2\right)dx + xydy = 0$.

Решение.

Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Разделим обе части на dx:

$$x^2 - y^2 + xy\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x^2 - y^2 + xyy' = 0,$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Сделаем замену:

$$u = \frac{y}{x},$$

$$y = ux,$$

$$y' = u'x + u,$$

получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x + u = u - \frac{1}{u},$$

$$u'x = -\frac{1}{u},$$

$$x\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u},$$

$$xdu = -\frac{1}{u}dx,$$

$$udu = -\frac{dx}{x},$$

$$\int udu = -\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2} = -\ln|x| + C,$$

$\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| + C$ — общий интеграл.