Лекция 1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка

На лекции рассматриваются вопросы:

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях
2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка.
3. Теорема Коши.

1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную *x*, искомую функцию $y = y(x)$ и производные искомой функции y', y'', y''', …, $y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной.

Например, $yy' + x = 0$ — дифференциальное уравнение первого порядка; $y'' - 6y' + 8y = 0$ — дифференциальное уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = e^x$ есть решение уравнения $y' - y = 0$, т.к. при подстановке ее в уравнение получаем тождество $e^x - e^x = 0$.

2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Если это уравнение разрешить относительно производной y', то получим

$$y' = f(x, y),$$

дифференциальное уравнение первого порядка, ***разрешенное относительно производной.***

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в ***дифференциальной форме***

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 .$$

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесчисленное множество решений.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C)$, которое является функцией переменной *x* и произвольной постоянной *C*.

Если общее решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то такое решение называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x, C_0)$, полученное из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если частное решение дифференциального уравнения первого порядка найдено в неявном виде $\Phi(x, y, C_0) = 0$, то такое решение называется ***частным интегралом*** дифференциального уравнения.

График любого частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***. Общему решению $y = \varphi(x, C)$ соответствует ***семейство интегральных кривых***.

На практике искомое частное решение дифференциального уравнения первого порядка получают из общего решения исходя из ***начальных условий***

$$y(x_0) = y_0 .$$

Найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, геометрически означает выделение из семейства интегральных кривых, которое соответствует общему решению $y = \varphi(x, C)$, единственной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Задача отыскания частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется ***задачей Коши***.

3. Теорема Коши

Теорема1 (Коши) (о существовании и единственности решения):

Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Точки, в которых условия теоремы существования и единственности нарушаются, называются ***особыми точками***.