○19.9. Из костей домино выбрали одну. Какова вероятность того, что:

а) она является «дублем»;

б) на ней выпала «шестерка»;

в) произведение очков на ней меньше 26;

г) модуль разности очков больше 1.

●19.10. В русском алфавите 33 буквы: 10 гласных, 21 согласная и 2 специальные буквы (ъ и ь). Два ученика независимо друг от друга выбрали по одной букве русского алфавита. Какова вероятность того, что:

а) были выбраны различные буквы;

б) обе выбранные буквы — гласные;

в) среди выбранных букв есть согласные;

г) это две соседние буквы алфавита.

○19.11. Из пяти чисел 1, 2, 3, 4, 5 поочередно выбирают два (без повторений). Найдите вероятность того, что:

а) первое из чисел меньше второго;

б) эти два числа — длины катетов прямоугольного треугольника с целочисленной гипотенузой;

в) произведение этих чисел оканчивается нулем;

г) первое из чисел делится на второе.

○19.12. Случайно и поочередно нажимают три клавиши одной октавы. Найдите вероятность того, что:

а) не была нажата «фа»;

б) не были нажаты ни «до», ни «си»;

в) была нажата «ля»;

г) получилась последовательность нот «до-ми-соль» (до-мажорное трезвучие).

§ 20. Сочетания и размещения

Правило умножения, которое мы использовали в предыдущем параграфе, применимо не только к двум, но и к трем, четырем и т. д. испытаниям. Если перемножить числа исходов испытаний, то в ответе получится число всех исходов независимого проведения этих испытаний. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Учительница подготовила к контрольной работе 4 примера на решение линейных неравенств, 5 текстовых задач (две на движение и три на работу) и 6 примеров на решение квадратных уравнений (в двух из них дискриминант отрицателен). В контрольной должно быть по одному заданию на каждую из трех тем. Найти общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;

г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

Р е ш е н и е. а) При выборе неравенства есть 4 исхода, при выборе текстовой задачи есть 5 исходов, при выборе квадратного уравнения есть 6 исходов. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов контрольной работы равно $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

б) В предыдущем рассуждении меняется число исходов при выборе текстовой задачи: их всего два. Значит, можно составить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ вариантов такой контрольной работы.

в) По сравнению с пунктом а) меняется число исходов при выборе уравнения: только в четырех случаях корни есть. Значит, можно составить $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ вариантов такой контрольной работы.

г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся *одновременно* и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения (только в двух случаях корней нет). Значит, можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта такой контрольной, а условию задачи удовлетворяют остальные $120 - 24 = 96$ вариантов.

Ответ: а) 120; б) 48; в) 80; г) 96.

Пример 2. Известно, что $x = 2^a3^b5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x.

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

Р е ш е н и е. а) Наименьшее число получится, когда $a = b = c = 0$. Тогда $x = 2^03^05^0 = 1$. Наибольшее число получится, когда $a = b = c = 3$. Тогда $x = 2^33^35^3 = 27 \cdot (2 \cdot 5)^3 = 27\,000$.

б) Рассмотрим три испытания: выбор числа a, выбор числа b и выбор числа c. Они независимы друг от друга, и в каждом имеется по четыре исхода. По правилу умножения получаем, что всего возможны $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта.

в) Число $x = 2^a3^b5^c$ будет четным только в тех случаях, когда $a > 0$, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора числа a есть три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ вариантов.

г) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет оканчиваться нулем только в тех случаях, когда среди множителей есть хотя бы одна двойка и есть хотя бы одна пятерка, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$ и $c \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора чисел a и c есть по три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ вариантов.

Ответ: а) 1 и 27 000; б) 64; в) 48; г) 36.

В курсе алгебры 9 класса вы познакомились с понятием факториала и теоремой о перестановках. Напомним их.

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Значения $n!$ очень быстро возрастают с увеличением n.

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Теорема 1. **n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.**

Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы:

$$P_n = n!.$$

P_n — это число перестановок из n различных элементов[1], оно равно $n!$.

Пример 3. К хозяину дома пришли гости A, B, C, D. За круглым столом — пять разных стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя C следует посадить рядом с гостем A?

г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя A не следует сажать рядом с гостем D?

Решение. а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего имеется P_5 способов их рассаживания: $P_5 = 5! = 120$.

б) Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами.

[1] Буква P в этом сокращении взята от первой буквы английского слова *permute* (*permutation*), что переводится как *переставлять* (*перестановка*).

в) Сначала выберем место для гостя A. Возможны 5 вариантов. Если место гостя A уже известно, то гостя C следует посадить или справа, или слева от A, всего 2 варианта. После того как места для A и C уже выбраны, нужно трех человек произвольно рассадить на 3 оставшихся места: $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Остается применить правило умножения: $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$.

г) Решение такое же, как и в пункте в). Место для гостя D после выбора места для A можно также выбрать двумя способами: на два отдаленных от A стула.

Ответ: а) 120; б) 24; в) 60; г) 60.

Пример 4. В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?

Решение. <u>Первый способ.</u> Рассмотрим таблицу 7×7, в которую вписаны результаты игр. В ней 49 клеток:

	1	2	3	4	5	6	7
1		3 : 1	0 : 5	2 : 2	0 : 0	1 : 0	1 : 3
2			4 : 3	1 : 0	1 : 0	0 : 0	1 : 1
3				1 : 3	1 : 0	1 : 2	0 : 0
4					1 : 1	1 : 1	1 : 4
5						1 : 0	0 : 0
6							2 : 2
7							

По диагонали клетки закрашены, так как никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, то останется $7^2 - 7 = 42$ клетки. В нижней части результатов нет, потому что все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы (не 3 : 1, а 1 : 3, не 1 : 4, а 4 : 1 и т. д.; результаты 0 : 0, 1 : 1 и т. д. дублируются). Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42, т. е. 21.

<u>Второй способ.</u> Произвольно пронумеруем команды № 1, № 2, ..., № 7 и посчитаем число игр поочередно. Команда № 1 встречается с командами № 2—7 — это 6 игр. Команда № 2 тоже проведет 6 встреч, но одну игру, с командой № 1, мы уже посчитали. Получается всего 5 новых игр. Команда № 3 проведет 6 встреч, из которых две, с командами № 1 и 2, уже посчитаны. Значит, добавятся еще 4 игры. Продолжая, получаем:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21.$$

Третий способ. Используем геометрическую модель: 7 команд — это вершины выпуклого семиугольника, а отрезок между двумя вершинами — это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков — столько игр. Из каждой вершины выходит 6 отрезков. Получается $7 \cdot 6$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: и как AB, и как BA. Значит, всего проведен $7 \cdot 3 = 21$ отрезок.

Ответ: 21 игра.

Проанализируем решение примера 4. Состав игры определен, как только мы *выбираем две* команды. Значит, количество всех игр в турнире для n команд — это в точности количество всех *выборов двух элементов из n данных* элементов. Важно при этом то, что порядок выбора не имеет значения, т. е. если выбрано две команды, то какая из них первая, а какая вторая — не существенно.

Первую команду можно выбрать n способами, а вторую — $(n - 1)$ способами. По правилу умножения получаем $n(n - 1)$. Но при этом состав каждой игры посчитан дважды. Значит, число игр равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Тем самым фактически доказана следующая теорема.

Теорема 2 (*о выборе двух элементов*). **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента без учета их порядка, то такой выбор можно произвести $\frac{n(n-1)}{2}$ способами.**

Достаточно длинный словесный оборот «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» неудобен при постоянном использовании в решении задач. Математики поступили просто: ввели новый термин и специальное обозначение.

Определение 2. Число всех выборов двух элементов *без учета их порядка* из n данных элементов называют **числом сочетаний из n элементов по 2** и обозначают C_n^2.

Символ C_n^2 читается в русской транскрипции так: «цэ из эн по два». Буква C хорошо согласуется здесь «и с французским, и с нижегородским»: с одной стороны, C — это первая буква слова *combinations*, с другой стороны, C — это первая буква слова *сочетание*.

Учитывая сказанное, теорему о выборе двух элементов без учета их порядка можно записать в виде краткой формулы

$$\boxed{C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Пример 5. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было: а) между футболистами; б) между хоккеистами; в) между футболистами и хоккеистами; г) всего?

Решение. а) $C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$

б) $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$

в) Будем действовать по правилу умножения. Одно испытание — выбор футболиста, а другое испытание — выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них, соответственно, 11 и 6 исходов. Значит, получится $11 \cdot 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы: $55 + 15 + 66 = 136$; но можно использовать и формулу для числа сочетаний:

$C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136.$ ◀

А что получится, если мы *будем учитывать порядок* двух выбираемых элементов? По правилу умножения получаем следующую теорему.

Теорема 3. **Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n - 1)$ способами.**

Доказательство. Первый по порядку элемент можно выбрать n способами. Из оставшихся $(n - 1)$ элементов второй по порядку элемент можно выбрать $(n - 1)$ способом. Так как два этих испытания (выбора) независимы друг от друга, то по правилу умножения получаем $n(n - 1)$. ◀

Определение 3. Число всех выборов двух элементов *с учетом их порядка* из n данных называют **числом размещений из n элементов по 2** и обозначают A_n^2.

Пример 6. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии; б) они должны быстро стереть с доски?

Решение. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702;$ б) $C_{27}^2 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351.$ ◀

Подведем итоги для числа выборов двух элементов из n данных.

Сочетания из n элементов по 2:	**Размещения из n элементов по 2:**
$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$	$A_n^2 = n(n-1)$

А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, 4, ... и вообще на произвольное число k, $1 \leqslant k \leqslant n$? Тут мы переходим к основному вопросу параграфа — к выборам, состоящим из произвольного числа элементов. Вот типичные вопросы: сколькими способами можно выбрать 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; актив класса (староста, культорг, редактор стенгазеты, организатор спортивных мероприятий) — 4 человека из 30; 7 монет из 10 данных монет; 10 карт из колоды в 32 карты и т. п. Введем специальные термины и обозначения.

Определение 4. Число всех выборов k элементов из n данных *без учета порядка* называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k. Число всех выборов k элементов из n данных *с учетом их порядка* называют **числом размещений из n элементов по k** и обозначают A_n^k.

Используя эти обозначения, нетрудно записать ответы на поставленные выше вопросы: 5 учеников из 30 для дежурства в столовой можно выбрать C_{30}^5 способами; 7 монет из 10 данных монет можно выбрать C_{10}^7 способами; 10 карт из колоды в 32 карты можно выбрать C_{32}^{10} способами. В этих случаях порядок не важен, и поэтому мы используем *сочетания*. А вот для состава актива класса важно, кто именно будет старостой, кто — культоргом, кто — редактором стенгазеты и кто будет отвечать за спорт. Поэтому следует использовать *размещения*: нужный выбор (4 человека из 30) можно произвести A_{30}^4 способами.

Однако нам важна не столько формульная запись ответа, сколько его конкретное числовое значение.

***Теорема 4.* Для любых натуральных чисел n и k таких, что $k < n$, справедливы соотношения:**

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), \tag{1}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \tag{2}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}, \tag{3}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Доказательство. 1) Нам следует поочередно выбирать k элементов из n данных. Проведем независимо k следующих испытаний. Первое из них состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 1. Это испытание имеет n исходов. После проведения первого испытания проведем второе. Оно состоит в выборе элемента, которому будет присвоен № 2. Так как один элемент из n данных уже выбран, то осталось $(n - 1)$ непронумерованных элементов. Значит, второе испытание имеет $(n - 1)$ исход. После проведения двух испытаний проводится третье, в результате которого один из оставшихся $(n - 2)$ элементов получит № 3, и т. д. В последнем k-м испытании будет $(n - (k - 1))$ исходов, так как в предыдущих испытаниях выбран $(k - 1)$ элемент. Остается применить правило умножения. Получим:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

2) $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3) Достаточно проверить, что $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Будем проводить выбор k элементов с учетом порядка в два этапа. Сначала выберем их «кучей», без учета порядка. Число вариантов здесь по определению равно C_n^k. На втором этапе будем упорядочивать, т. е. нумеровать по порядку выбранные k элементов всеми возможными способами. Но число таких нумераций (перестановок) равно $P_k = k!$. Значит, каждому неупорядоченному выбору k элементов из n данных соответствует $k!$ упорядоченных выборов. При этом каждый упорядоченный выбор будет посчитан ровно один раз. Следовательно, $k! \cdot C_n^k = A_n^k$.

4) Это очевидное следствие формул (3) и (2).

Заметим, что при $k = 2$ получаются уже известные формулы из теорем 2 и 3. Действительно, по формуле (1) получаем:

$$A_n^2 = n(n-1).$$

Используя формулы (3) и (1), получаем:

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пример 7. В классе 27 учеников, из них нужно выбрать троих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый ученик должен решить задачу, второй — сходить за мелом, третий — пойти дежурить в столовую; б) им следует спеть хором?

Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет. Значит, в первом случае получим A_{27}^3, во втором — C_{27}^3.

а) $A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25 = 17\,550;$

б) $C_{27}^3 = \dfrac{A_{27}^3}{3!} = \dfrac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9 \cdot 13 \cdot 25 = 2925.$

Пример 8. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили выбрать 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) Найти число всевозможных выборов инструментов.

б) Найти число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).

в) Сколько всего различных инструментальных составов квартета может получиться?

Р е ш е н и е. а) Требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных без учета порядка, т. е. число сочетаний из 11 элементов по 4:

$$C_{11}^4 = \frac{A_{11}^4}{4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330.$$

б) Это уже знакомая нам задача про рассаживание четырех субъектов на 4 места. Найдем число перестановок:

$$P_4 = 4! = 24.$$

в) Каждый инструментальный состав квартета получается в результате проведения двух независимых испытаний: первое — из пункта а), второе — из пункта б). По правилу умножения получаем:

$$C_{11}^4 \cdot P_4 = 330 \cdot 24 = 7920.$$

Впрочем, ответ можно получить и без использования пунктов а) и б). Действительно, можно считать, что выбор инструментов происходит поочередно: первой выбирает Мартышка, потом Осел, Козел и Мишка. Значит, требуется найти количество всех выборов четырех элементов из 11 данных с учетом порядка, т. е. число размещений из 11 элементов по 4:

$$A_{11}^4 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$$

Ответ: а) 330; б) 24; в) 7920.

Теперь посмотрим на число C_n^k при $k = n$. По определению C_n^n — это количество выборов n элементов из n данных. Но такой выбор единственный — надо взять все множество целиком; значит, $C_n^n = 1$.

А если к этому случаю применить формулу из теоремы 4, то получается:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!}.$$

Что же такое «ноль факториал»? Математики поступили просто. Чтобы сохранить красивую формулу для чисел C_n^k при любых целочисленных значениях k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, решили *по определению* считать, что $0! = 1$. Тогда

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

что отлично согласуется с комбинаторным определением C_n^n.

При такой договоренности понятный смысл имеет и C_n^0; получается, что

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1.$$

Действительно, 0 элементов из n данных можно «выбрать» единственным способом, ничего не выбирая.

У теоремы 4 есть ряд важных следствий. Рассмотрим одно из них: *справедлива формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В самом деле,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Как видите, числители в обоих случаях одинаковы, а в знаменателе множители меняются местами, что, естественно, не отражается на числовом значении выражения.

В чем польза полученной формулы? Представьте себе, что надо вычислить C_{15}^{13}. Если использовать равенство $C_{15}^{13} = C_{15}^{2}$, то вычисления упростятся: $C_{15}^2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$.

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде *треугольной таблицы* — ее называют *треугольником Паскаля.* Приведем эту таблицу:

$$\begin{array}{c}
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Основная закономерность образования строк состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке* ($5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$; $6 = 3 + 3$ и т. д.). В общем виде (в виде формулы) это свойство записывается так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Например, C_6^4 можно вычислить непосредственно по пятой строке треугольника Паскаля $C_6^4 = C_5^4 + C_5^3 = 5 + 10 = 15$.

Докажем, что $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. Имеем:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!^{\,|n-k}}{k!\cdot(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!^{\,|k}}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Упражнения

○20.1. Двузначное число составляют из цифр 0, 1, 3, 4, 5, 6, 9 (повторения цифр допустимы).

а) Сколько всего можно составить чисел?

б) Сколько всего можно составить чисел, больших 50?

в) Сколько всего можно составить нечетных чисел?

г) Сколько всего можно составить нечетных чисел, меньших 55?

○20.2. В шахматном зале 5 столов. Для проведения игры за каждый стол садится по одному шахматисту из двух встречающихся команд. В каждой команде по 5 шахматистов.

а) Найдите число всех возможных составов матчей (Иванов — Петров, Сидоров — Каспаров и т. д.).

б) То же, но для двух независимо проводимых матчей.

в) То же, но если во втором матче за тремя выбранными столами играют по три лучших шахматиста из каждой команды.

г) То же, что и в пункте б), но если во втором матче капитаны команд обязательно играют между собой.

○20.3. Вычислите:

а) $\frac{7!+8!}{5!+6!}$; в) $\frac{1}{6!}+\frac{1}{5!}-\frac{49}{7!}$;

б) $\frac{1}{4!}+\frac{10}{5!}+\frac{630}{6!}$; г) $\frac{7}{11}\cdot\frac{(10!)^2-(9!)^2}{(8!)^2-(7!)^2}$.

○20.4. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого:

а) верно неравенство $(n+1)! > (0{,}99n+5)\cdot n!$;

б) верно неравенство $(n+1)! > (n+333)\cdot(n-1)!$;

в) число $\frac{2^n}{n!}$ меньше единицы;

г) число $n!$ составляет более 1000% от числа $(n-1)!$.

●20.5. Сколькими нулями оканчивается число:

а) 10!; б) 15!; в) 26!; г) 100!?

○20.6. В правильном 17-угольнике провели все стороны и все диагонали.

а) Сколько всего провели отрезков?

б) Сколько провели сторон?

в) Сколько провели диагоналей?

г) Сколько провели диагоналей, которые отсекают треугольник от 17-угольника?

20.7. Важен или нет порядок в следующих выборах:

а) капитан волейбольной команды и его заместитель;

б) три ноты в аккорде;

в) шесть человек останутся убирать класс;

г) придумайте 4 различные ситуации, в двух из которых порядок выбора важен, а в двух — нет.

Вычислите:

20.8. а) C_{17}^2 и A_{17}^2; б) C_{100}^2 и A_{100}^2; в) C_5^3 и A_5^3; г) C_8^4 и A_8^4.

○20.9. а) $C_{27}^2-C_{26}^2$; б) $\frac{A_{10}^3}{C_{10}^3}$; в) $\frac{A_8^6}{A_{10}^2}$; г) $C_{11}^5-C_{11}^6$.

○20.10. Решите уравнение:

а) $C_x^3=2C_x^2$; в) $C_x^2+C_{x+1}^2=49$;

б) $C_x^{x-2}=15$; г) $C_8^x=70$.

○**20.11.** Решите уравнение:

а) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$; в) $C_x^3 = A_x^2$;

б) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$; г) $C_x^4 = A_x^3 + C_x^3$.

●**20.12.** Решите неравенство:

а) $120 < A_{k-3}^2 < 140$; в) $C_{10}^2 < A_x^2 < 60$;

б) $C_6^2 < A_n^2 < C_8^2$; г) $C_{19}^2 < A_x^2 + C_x^2 < 200$.

●**20.13.** Найдите значение n, при котором:

а) число C_{n+1}^2 составляет 80% от числа C_n^3;

б) число C_{n+1}^3 составляет 120% от числа C_n^4;

в) число C_{2n}^{n-1} составляет 56% от числа C_{2n+1}^{n-1};

г) число C_{2n+3}^n составляет 120% от числа C_{2n+2}^{n+1}.

○**20.14.** «Вороне где-то Бог послал кусочек сыра», брынзы, колбасы, сухарика и шоколада. «На ель Ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж было собралась, да призадумалась»:

а) если есть кусочки по очереди, то из скольких вариантов придется выбирать;

б) сколькими способами можно составить «бутерброд» из двух кусочков;

в) если съесть сразу три кусочка, а остальные спрятать и съесть завтра и послезавтра, то из скольких вариантов придется выбирать;

г) сколько получится, если один кусочек все-таки бросить Лисе, а потом ответить на вопрос а)?

●**20.15.** Три клавиши из семи (ноты до, ре, ми, фа, соль, ля, си одной октавы) можно нажать либо одновременно (аккорд), либо поочередно (трезвучие).

а) Найдите число всех возможных трезвучий.

б) Найдите число всех возможных аккордов.

в) Найдите число всех возможных аккордов, содержащих ноту соль.

г) Найдите число всех возможных аккордов, в которых нет подряд идущих нот.

○**20.16.** Из колоды в 36 карт одновременно выбирают 5 карт. Найдите:

а) число всех возможных вариантов открытых карт;

б) число вариантов, при которых среди открытых карт есть 4 туза;

в) число вариантов, при которых все открытые карты — пики;

г) число вариантов, при которых все открытые карты одной масти.

○**20.17.** За четверть в классе прошли 5 тем по алгебре. Для подготовки к контрольной работе составлено по 10 задач к каждой теме. На контрольной будет по одной задаче из каждой темы. Ученик умеет решать только по 8 задач в каждой теме. Найдите:

а) общее число всех вариантов контрольной работы;

б) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все пять задач;

в) число тех вариантов, в которых ученик ничего не может решить;

г) число тех вариантов, в которых ученик умеет решать все задачи, кроме первой.

●**20.18.** Встретились несколько человек и стали здороваться друг с другом. Рукопожатий было от 60 до 70. Сколько всего человек встретилось, если известно, что:

а) каждый здоровался с каждым;

б) только один человек не здоровался ни с кем;

в) только двое не поздоровались между собой;

г) четверо поздоровались только между собой.

●**20.19.** Из 20 вопросов к экзамену ученик 12 выучил, 5 совсем не смотрел, а в остальных что-то знает, а что-то нет. На экзамене в билете будет три вопроса.

а) Найдите количество возможных вариантов билета.

б) Сколько из них тех, в которых ученик знает все вопросы?

в) Сколько из них тех, в которых есть вопросы всех трех типов?

г) Сколько из них тех, в которых ученик выучил большинство вопросов?

●**20.20.** В театре 10 певцов и 8 певиц, а для исполнения оперы в хоре должно быть 5 мужских и 3 женских голоса.

а) Сколько существует различных составов хора?

б) То же, но если известно, что певцы А и Б ни за что не будут петь вместе?

в) То же, но если известно, что певец А будет петь тогда, и только тогда, когда будет петь певица В?

г) То же, если 6 певцов накануне сорвали голос на футболе и одной певице придется петь мужскую партию.