Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Вектор $\overline{x} \neq \overline{0}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), если найдется такое число λ, что

$$\widetilde{A}\left(\overline{x}\right) = \lambda\,\overline{x} \qquad (\quad)$$

Число λ называется *собственным значением* оператора $\widetilde{A}$ (матрицы A), соответствующим вектору $\overline{x}$.

Равенство ( ) может быть записано в матричной форме

$$A\left(\overline{x}\right) = \lambda\,\overline{x},$$

где A — матрица линейного оператора; $\overline{x} = \left(x_1,\, x_2\, ,...,\, x_n\right)$ — вектор, записанный в виде вектор-столбца.

Равенство ( ) можно записать в виде:

$$(A - \lambda E)\ \overline{x} = \overline{0},$$

где E — единичная матрица той же размерности, что и матрица A. Собственные числа определяются из условия равенства нулю определителя

$\left|A - \lambda E\right|$.

Пример:

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\widetilde{A}$, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix};$$

$$\left|A - \lambda E\right| = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)^2-36=0,$$

$\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 7$ — собственные значения линейного оператора $\widetilde{A}$.

Найдем собственный вектор $\overline{x}^{(1)} = (x_1,\ x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -5$. Для этого решаем матричное уравнение

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overline{0},$$

$$\begin{pmatrix} 1+5 & 4 \\ 9 & 1+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2=0, \\ 9x_1+6x_2=0, \end{cases}$$

$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_2 = -1{,}5x_1.$$

Пусть $x_1 .= C_1$, тогда векторы $\overline{x}^{(1)} = (C_1;\ 1{,}5\mathrm{C}_1)$ при любом $C_1 \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\widetilde{A}$, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = -5$.

Найдем собственный вектор $\overline{x}^{(2)} = (x_1;\ x_2)$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$.

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \overline{0},$$

$$\begin{pmatrix} 1-7 & 4 \\ 9 & 1-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -6x_1+4x_2=0, \\ 9x_1-6x_2=0, \end{cases}$$

$$-3x_1 + 2x_2 = 0,$$

$$x_1 = \frac{2}{3}x_2.$$

Пусть $x_2 = C_2$, тогда векторы $\overline{x}^{(2)} = \left(\frac{2}{3}C_2;\ C_2\right)$ при любом $C_1 \neq 0$ являются собственными векторами линейного оператора $\widetilde{A}$, соответствующими собственному значению $\lambda_2 = 7$.