Переход к новому базису

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ ...,\ \overline{e_n}\right)$ и новый $\left(\overline{e_1^/},\ \overline{e_2^/},\ ...,\ \overline{e_n^/}\right)$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\overline{e_1^/} = a_{11}\overline{e_1^/} + a_{12}\overline{e_2^/} + ... + a_{1n}\overline{e_n^/},$$

$$\overline{e_2^/} = a_{21}\overline{e_1^/} + a_{22}\overline{e_2^/} + ... + a_{2n}\overline{e_n^/}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\overline{e_n^/} = a_{n1}\overline{e_1^/} + a_{n2}\overline{e_2^/} + ... + a_{nn}\overline{e_n^/}$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от старого базиса к новому.

Если $\overline{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно старого базиса и $(x_1^/,\ x_2^/,\ \ldots,\ x_n^/)$ относительно нового базиса, то зависимость координат вектора в разных базисах в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1^/ \\ x_2^/ \\ ... \\ x_n^/ \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} x_1^/ \\ x_2^/ \\ ... \\ x_n^/ \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пример:

Найти координаты вектора

$\overline{b} = \left(4;\ -4;\ 5\right)$, заданного в базисе $\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}\right)$, в базисе $\left(\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3}\right)$, если $\overline{a_1} = \left(1;\ 1;\ 0\right)$, $\overline{a_2} = \left(1;\ -1;\ 1\right)$, $\overline{a_3} = \left(-3;\ 5;\ -6\right)$.

Решение:

Матрица перехода от базиса $\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}\right)$ к базису $\left(\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3}\right)$ имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -6\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} (см. §)

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 6 & -6 & -8\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Тогда $$\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 6 & -6 & -8\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\ 8\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\\ 5\\ -0,5\end{pmatrix},$$ т.е.

$\overline{b}=(0,5;\ 2;\ -0,5)$ в базисе $(\overline{a_1},\ \overline{a_2},\ \overline{a_3})$.