Деление отрезка в данном отношении

Предположим, что отрезок AB, соединяющий две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, требуется разделить точкой C на два отрезка AC и CB таким образом, чтобы отношение длин полученных отрезков равнялось числу λ:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda .$$

Задача состоит в том, чтобы выразить координаты точки $C(x; y)$ через число λ и через координаты точек A и B (рис. 4). Опустим из точек A, B, C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на ось Ox. Тогда угол, образованный прямой AB и осью Ox, пересекают три параллельные прямые, и, следовательно, рассекают стороны угла на пропорциональные части, т. е.

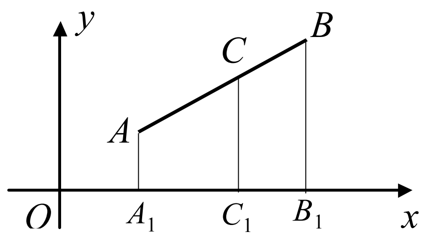

Рис. 4.

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{AC}{CB} = \lambda ,$$

откуда $\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \lambda$, а так как $A_1C_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = x_2 - x$, то получим уравнение относительно x:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda ,$$

из которого следует

$x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$ или $x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2$ и, окончательно,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} . \qquad (1.3)$$

Аналогично,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} . \qquad (1.4)$$

Формулы (1.3) и (1.4) позволяют найти координаты точки C. В частности, при $\lambda = 1$, т. е. если точка C делит отрезок AB пополам, получим

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} , \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

Пример 2. Найти координаты точки $C(x;\ y)$, делящей отрезок между точками $A(1;\ -2)$ и $B(4;\ 7)$ в отношении AC:CB=2.

Решение. Воспользовавшись формулами (1.3) и (1.4) получим

$$x = \frac{1 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 3, \qquad y = \frac{-2 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = 4.$$