МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра деталей машин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Методические указания по изучению дисциплины,
выполнению расчётно-графической и контрольной работ
для студентов специальности 23.05.01
«Наземные транспортно-технологические средства»
и направления подготовки 23.03.03
«Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»
очной и заочной форм обучения

3-е издание, исправленное

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2016

УДК 531.1+378.147–322.1
ББК 22.23+74.58
Т 33

Составители: сотрудники Костромской ГСХА д.т.н., профессор кафедры деталей машин *С.Н. Разин*, к.э.н., доцент кафедры высшей математики *А.Е. Березкина.*

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры технических систем в АПК Костромской ГСХА *Д.С. Лебедев.*

Рекомендовано к изданию методической комиссией
инженерно-технологического факультета,
протокол № 2 от 17 марта 2016 г.

Т 33 **Теоретическая механика. Кинематика** : методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ для студентов специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» и направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» очной и заочной форм обучения / сост. С.Н. Разин, А.Е. Березкина. — 3-е изд., испр. — Караваево : Костромская ГСХА, 2016. — 36 с.

Издание содержит изложение теоретического материала в виде кратких ответов на вопросы по кинематике, выносимые на экзамен, и примеры решения типовых задач. После изложения теоретического материала приведены 4 задания по основным разделам кинематики: кинематика точки, поступательное и вращательное движения твердого тела, плоскопараллельное движение твердого тела, сложное движение точки.

Методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ предназначены для студентов специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» и направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» очной и заочной форм обучения.

УДК 531.1+378.147–322.1
ББК 22.23+74.58

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика как наука состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики. В кинематике, которой посвящено учебное пособие, излагается учение о способах задания движения тел и методах определения основных кинематических характеристиках движения, таких как скорость и ускорение точки, угловая скорость и угловое ускорение тела. Движение в кинематике рассматривается с геометрической точки зрения, то есть без учета факторов, вызывающих это движение.

Кинематика как отдельный раздел механики выделилась позже статики и динамики — лишь в XIX веке под влиянием запросов развивающегося машиностроения. В настоящее время кинематика имеет большое самостоятельное значение для изучения движения механизмов и машин. Видными учеными, внесшими свой вклад в теоретическую механику, являются: М.В. Остроградский (1801-1861), П.Л. Чебышев (1821-1894), С.В. Ковалевская (1850-1891), А.М. Ляпунов (1857-1918), И.В. Мещерский (1859-1935), К.Э. Циолковский (1857-1935), А.Н. Крылов (1863-1945), Н.Е. Жуковский (1847-1921), С.А. Чаплыгин (1869-1942).

Данное издание предназначено для студентов специальностей 110301 «Механизация сельского хозяйства», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», 110303 «Механизация переработки сельскохозяйственной продукции», 110304 «Технология обслуживания и ремонта машин в агропромышленном комплексе» направления «Агроинженерия» и специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270106 «Производство строительных материалов, изделий и конструкций», 270114 «Проектирование зданий» направления «Строительство» очной и заочной форм обучения.

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Векторный способ задания движения точки

Задать движение — это значит уметь определить положение точки в каждый момент времени. Векторный способ задания движения заключается в задании вектор функции: $\bar{r} = \bar{r}\,(t)$. Подставляя в нее значения времени t_1, t_2, ..., получим вектора $\bar{r}_1 = \bar{r}\ (t_1)$, $\bar{r}_2 = \bar{r}\ (t_2)$, …, которые определяют положение точки в эти моменты времени (рис. 1). Построить вектор можно только в некоторой системе координат. Векторный способ подразумевает наличие системы координат, но не конкретизирует ее, поэтому им пользуются при выводе теоретических положений.

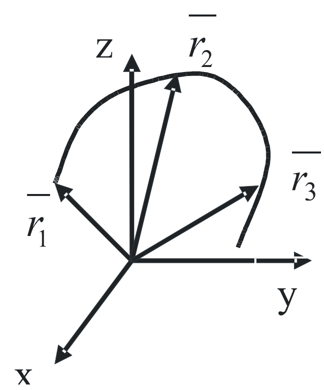


Рис. 1

Линия, которую описывает точка при своем движении, называется *траекторией*.

1.2. Координатный способ задания движения точки

При этом способе задается 3 функции (при движении в пространстве), определяющие три координаты точки в каждый момент времени. Системы координат могут быть разными, например: прямоугольная Декартова, цилиндрическая или сферическая системы координат. В первом случае задается: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ — это и есть уравнения движения точки (рис. 2). В цилиндрической системе координат (рис. 3) задаются: $\rho = \rho(t)$;$\varphi = \varphi\ (t)$; $z = z(t)$. В сферической (рис. 4): $\varphi = \varphi(t)$; $\theta = \theta(t)$; $r = r(t)$. Если движение задано в какой-то из этих систем координат, то всегда можно перейти к заданию движения в любой из двух других.

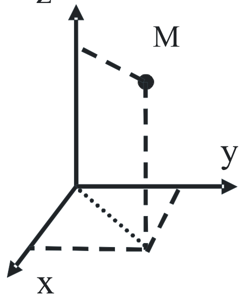


Рис. 2

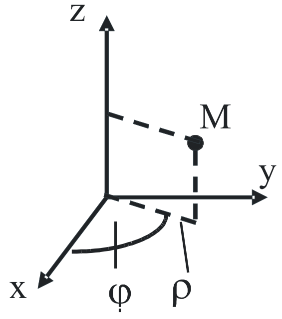


Рис. 3

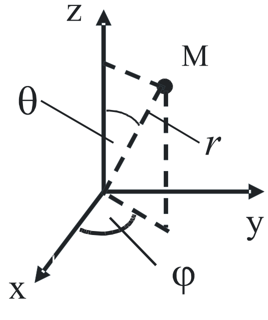


Рис. 4

1.3. Естественный способ задания движения точки

Он заключается в задании (рис. 5):

1) траектории точки: $y = f(x)$,
2) начала отсчета (точка О),
3) положительного направления отсчета,
4) закона движения $s = s(t)$, где s — дуговая координата.

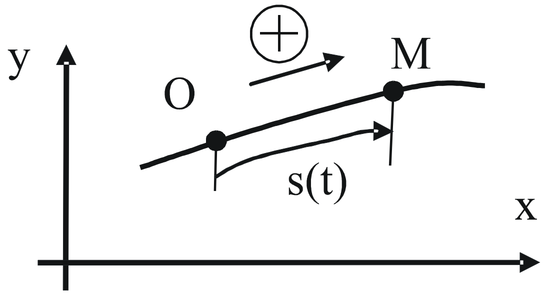


Рис. 5

1.4. Естественные оси координат

Естественные оси двигаются вместе с точкой и изменяют свое положение в пространстве. Этих осей три (рис. 6): касательная, главная нормаль, бинормаль.

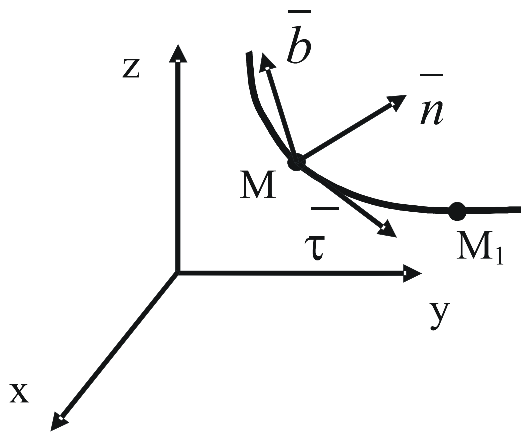


Рис. 6

Единичный вектор касательной $\bar{\tau}$ (тау) направлен по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуги.

Соприкасающаяся плоскость — предельное положение плоскости, проходящей через т. M_1, лежащую на кривой, и касательную в т. М, при стремлении т. M_1 к т. М. Единичный вектор главной нормали $\bar{n}$ перпендикулярен $\bar{\tau}$, лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории. Плоскость, перпендикулярная касательной, называется *нормальной*. Единичный вектор бинормали $\bar{b}$ перпендикулярен соприкасающейся плоскости и направлен в ту сторону, откуда вращение от $\bar{\tau}$ к $\bar{n}$ по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки. Плоскость ($\bar{\tau}, \bar{b}$) называется *спрямляющей*.

1.5. Скорость при векторном способе задания движения

Пусть за время Δt точка переместилась из M в M_1 (рис. 7), вектор $\Delta \bar{r}$ — вектор перемещения.

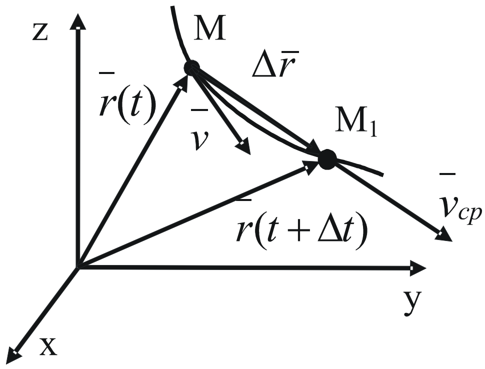


Рис. 7

Средней скоростью точки за время Δt называется вектор $\bar{v}_{cp} = \Delta \bar{r} / \Delta t$. *Скоростью точки в данный момент времени* называется предел, к которому стремится отношение вектора перемещения к промежутку времени, за которое оно произошло, при стремлении последнего к нулю:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{r} / \Delta t.$$

Из рисунка 7 видно, что: $\bar{r}\,(t) + \Delta \bar{r} = \bar{r}\,(t + \Delta t)$,

Тогда $$\Delta \bar{r} = \bar{r}\,(t + \Delta t) - \bar{r}\,(t)$$

и $$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{r} / \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{r}\,(t + \Delta t) - \bar{r}\,(t)) / \Delta t = d\bar{r} / dt.$$

То есть скорость точки в данный момент времени равна первой производной от радиуса вектора по времени. Из рисунка 7 видно, что вектор скорости в данный момент времени занимает положение касательной. Скорость измеряется в м/с.

1.6. Ускорение при векторном способе задания движения

Средним ускорением называется отношение вектора изменения скорости к промежутку времени, за которое оно произошло: $\bar{a}_{cp} = \Delta \bar{v} / \Delta t$.

Ускорением точки в данный момент называется предел этого отношения при стремлении промежутка времени к нулю:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{v} / \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}\,(t + \Delta t) - \bar{v}\,(t)) / \Delta t.$$

Ускорение равно первой производной от скорости или второй производной от радиуса вектора по времени:

$$\bar{a} = d\bar{v} / dt = d\bar{r} / dt^2.$$

Ускорение $\bar{a}_{ср}$, а значит, и ускорение в данный момент времени $\bar{a}$ направлено в сторону вогнутости траектории (рис. 8).

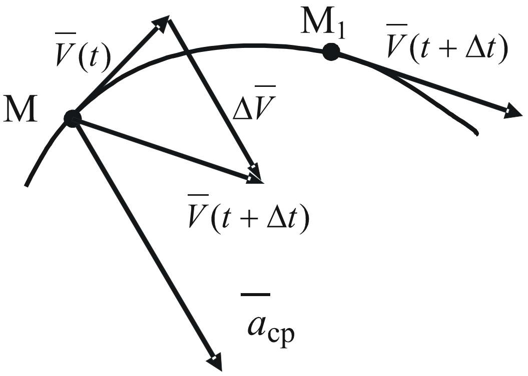


Рис. 8

Ускорение измеряется в м/с^2.

1.7. Скорость при координатном способе задания движения

Известно, что $\bar{v} = d\bar{r}/dt$, но $\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$, тогда (т.к. $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — const):

$$\bar{v} = dx/dt \cdot \bar{i} + dy/dt \cdot \bar{j} + dz/dt \cdot \bar{k}, \tag{1}$$

С другой стороны: $$\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получим:

$$v_x = dx/dt;\; v_y = dy/dt;\; v_я = dz/dt.$$

Т.е. *проекция скорости на ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени*. Зная проекции, можно найти модуль скорости:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,,$$

а также направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{v};\bar{i}) = v_x/|\bar{v}|;\; \cos(\bar{v};\bar{j}) = v_y/|\bar{v}|;\; \cos(\bar{v};\bar{k}) = v_z/|\bar{v}|.$$

1.8. Ускорение при координатном способе задания движения

Известно, что $\bar{a} = d\bar{v}/dt$, но $\bar{v} = v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}$,

тогда:

$$\bar{a} = dv_x/dt \cdot \bar{i} + dv_y/dt \cdot \bar{j} + dv_z/dt \cdot \bar{k}, \tag{3}$$

с другой стороны:

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), получим:

$$a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2; \quad a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2; \quad a_z = dv_z/dt = d^2z/dt^2.$$

То есть *проекция ускорения на ось равна первой производной от проекции скорости на ту же ось, или второй производной от соответствующей координаты по времени.*

Модуль ускорения:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,$$

направляющие косинусы:

$$\cos(\bar{a};\bar{i}) = a_x / \left|\bar{a}\right|;\ \cos(\bar{a};\bar{j}) = a_y / \left|\bar{a}\right|; \cos(\bar{a};\bar{k}) = a_z / \left|\bar{a}\right|.$$

1.9. Скорость при естественном способе задания движения

Известно : $\bar{V} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta \bar{r}\ /\ \Delta t \cdot \Delta s\ /\ \Delta s = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \Delta \bar{r}\ /\ \Delta s \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s\ /\ \Delta t.$

Так как первый предел по модулю равен единице, а направлен по касательной, то он равен $\bar{\tau}$ (тау), обозначим: $ds / dt = v_\tau$, тогда: $\bar{V} = v_\tau \cdot \bar{\tau}$.

1.10. Ускорение при естественном способе задания движения

Известно, что:

$$\bar{a} = d\bar{v} / dt = dv_\tau / dt \cdot \bar{\tau} + v_\tau \cdot d\bar{\tau} / dt.$$

Можно показать, что:

$$d\bar{\tau} / dt = v_\tau / \rho \cdot \bar{n}\ .$$

Тогда формула (1) примет вид:

$$\bar{a} = dv_\tau / dt \cdot \bar{\tau} + v_\tau^2 / \rho \cdot \bar{n}. \tag{5}$$

С другой стороны:

$$\bar{a} = a_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} + a_b \cdot \bar{b}. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), получим:

$$a_\tau = dv_\tau / dt; \quad a_n = v_\tau^2 / \rho; \quad a_b = 0.$$

Здесь ρ — радиус кривизны траектории — величина, обратная кривизне k: $\rho = 1 / k$.

По определению:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \varepsilon / \Delta s,$$

где ε — угол смежности (угол между касательными в двух точках кривой, лежащих на расстоянии Δs). Радиус кривизны — это радиус максимальной окружности, которую можно вписать в кривую в данной точке. Радиус кривизны окружности равен радиусу окружности, у прямой он равен ∞.

1.11. Поступательное движение твердого тела

Поступательным движением называется такое движение тела, при котором любая прямая, жестко соединенная с телом, остается параллельной своему начальному положению.

Т е о р е м а: *при поступательном движении все точки тела описывают совпадающие при наложении траектории и имеют в данный момент времени одинаковые скорость и ускорение.*

Пусть тело (рис. 9), двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A'B'. Фигура ABA'B' — параллелограмм, т.к. стороны AB и A'B' равны и параллельны. Следовательно, перемещения точек A и B будут так же равны и параллельны, т.е.: $\Delta\overline{r}_A = \Delta\overline{r}_B$.

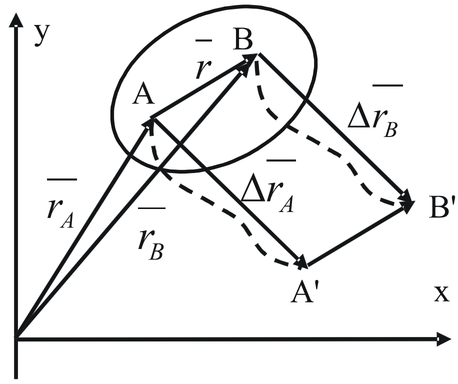


Рис. 9

Из рисунка видно, что траектория т. B получается из траектории т. A смещением на $\overline{r}$, т.е. траектории совпадают при наложении. Взяв два раза производную от равенства $\overline{r}_A = \overline{r}_B$, получим: $\overline{v}_A = \overline{v}_B$; $\overline{a}_A = \overline{a}_B$. Что и требовалось доказать. То есть при изучении поступательного движения достаточно изучить движение хотя бы одной его точки, а для этого можно использовать теорию, полученную в кинематике точки.

1.12. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором имеются две точки, остающиеся все время неподвижными.

Линия, проходящая через эти две точки, называется осью вращения. Все точки, лежащие на оси вращения, неподвижны. Положение вращающегося тела можно задать с помощью двугранного угла φ (рис. 10) между неподвижной полуплоскостью (н.п.) и подвижной полуплоскостью (п.п.), жестко связанной с телом.

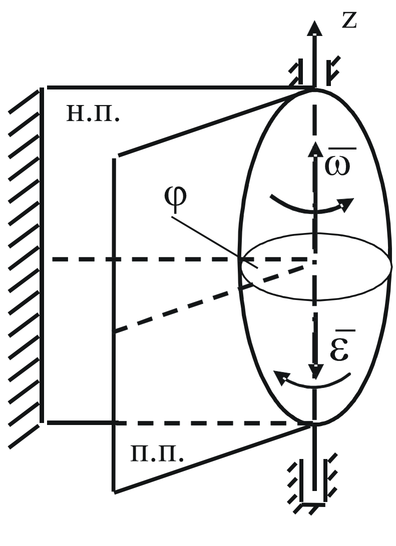


Рис. 10

Угол φ положителен, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси вращения, поворот виден происходящим против часовой стрелки. Для задания вращения надо задать функцию, описывающую изменение угла φ во времени: $\varphi = \varphi(t)$. Это и есть закон вращательного движения. Основными кинематическими характеристиками вращательного движения являются угловая скорость ω (рад/сек; 1/с) и угловое ускорение ε (рад/сек^2; 1/с^2). Эти величины вводятся по аналогии с понятиями скорости и ускорения точки.

Угловая скорость ω (омега) есть предел, к которому стремится отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за которое оно произошло, при стремлении последнего к нулю. Угловое ускорение ε (ипсилон) — предел отношения приращения угловой скорости к промежутку времени при стремлении последнего к нулю. Очевидно, эти пределы равны первым производным от угла и угловой скорости по времени, то есть:

$$\omega = d\varphi/dt; \quad \varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2.$$

В технике часто угловая скорость задается в оборотах в минуту. В этом случае она называется частотой вращения и обозначается буквой n. Связь между ω и n имеет вид: $\omega = \pi \cdot n/30$.

Угловые скорость и ускорение можно представить как векторы. Вектор $\overline{\omega}$ направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против часовой стрелки. Вектор $\overline{\varepsilon}$ направлен в сторону вектора $\overline{\omega}$, если вращение ускоренное, и в противоположную сторону — если замедленное (см. рис. 10).

1.13. Скорость и ускорение точек тела при вращательном движении. Формула Эйлера

Пусть за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$, тогда т. М опишет дугу окружности длиной Δs (рис. 11, *а*). Найдем скорость т. М:

$$v_M = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} (R \cdot \Delta\varphi)/\Delta t = R\cdot\omega.$$

Ускорение касательное:

$$a_\tau = dv_M/dt = d(R \cdot \omega)/dt = R \cdot d\omega/dt = R \cdot \varepsilon.$$

Ускорение нормальное :

$$a_n = v_M{}^2/\rho = \omega^2 R^2/R = \omega^2 R.$$

Тогда полное ускорение:

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + w^4}\ .$$

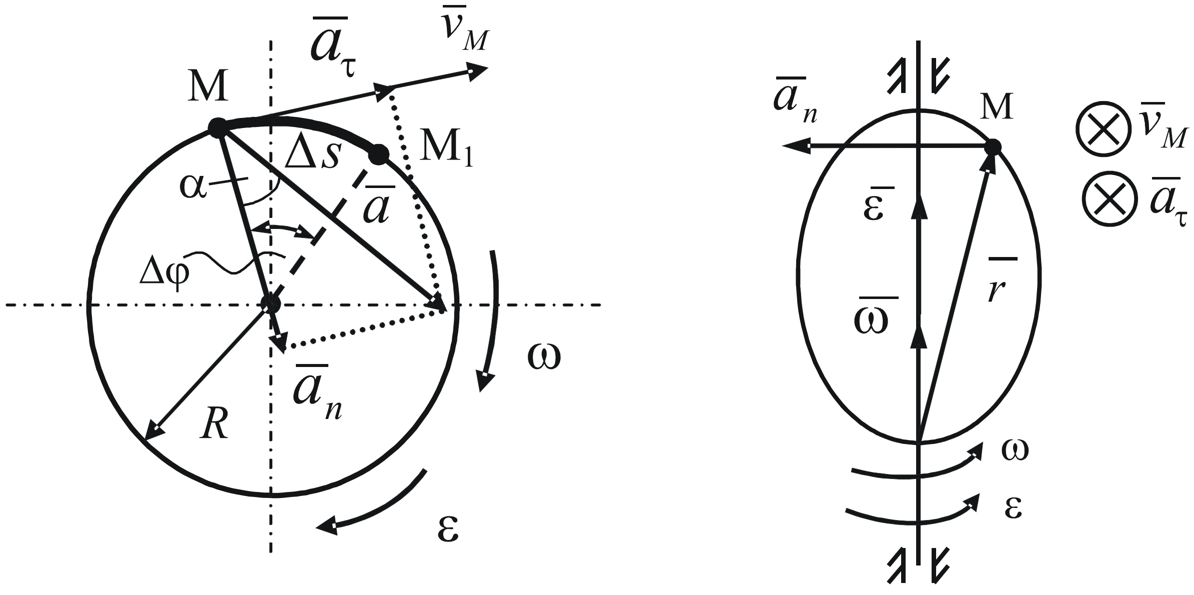
Угол наклона полного ускорения к радиусу не зависит от R:

$$tg\alpha = a_\tau/a_n = \varepsilon/\omega^2.$$

Скорость т. М можно найти и с помощью векторного произведения:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$

Это и есть *формула Эйлера*. Здесь $\bar{r}$ — радиус вектор точки М (рис. 11, *б*).



а) *б)*

Рис. 11

Взяв производную от формулы Эйлера, получим:

$$\bar{a}_M = d\bar{v}_M / dt = d\bar{\omega} / dt \times \bar{r} + \bar{\omega} \times d\bar{r} / dt = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Можно проверить, что первое слагаемое есть a_τ, а второе — a_n.

1.14. Уравнение равнопеременного вращения

Равнопеременным вращением называется такое вращение, при котором угловое ускорение постоянно ($\varepsilon = \text{const}$).

Но $\varepsilon = d\omega / dt$, разделив переменные и проинтегрировав:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon \, dt ,$$

получим закон изменения угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t, \qquad \text{или} \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (7)$$

Учитывая, что $\omega = d\varphi/dt$, разделяя переменные и интегрируя еще один раз, получим закон равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + 1/2\, \varepsilon t^2 . \qquad (8)$$

Из уравнения (7) видно, что если ε и ω_0 имеют одинаковый знак, то ω по модулю возрастает с течением времени. В этом случае вращение называется равноускоренным. В формуле (8) обычно полагают $\varphi_0 = 0$, т.к. начальный угол поворота φ_0 зависит от выбора начала отсчета. Если $\varepsilon = 0$, то вращение называется равномерным. $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t$ — закон равномерного вращения.

1.15. Плоскопараллельное движение

Плоскопараллельным движением называется такое движение, при котором имеется сечение тела, движущееся параллельно некоторой неподвижной плоскости (рис. 12). Очевидно, что точки, лежащие на перпендикуляре A_1A_2 к сечению S, двигаются, так же как точка А. Следовательно, для изучения движения всего тела достаточно изучить движение сечения S. Положение сечения S определяется положением отрезка АВ (рис. 13).

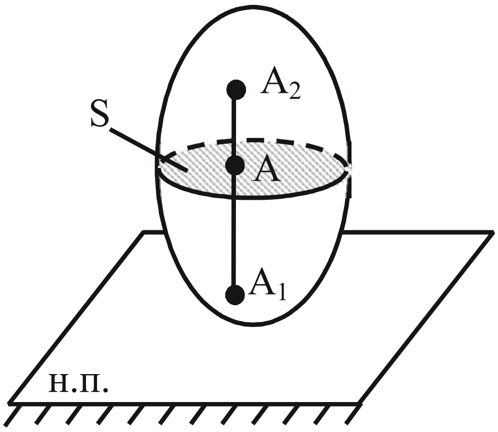


Рис. 12

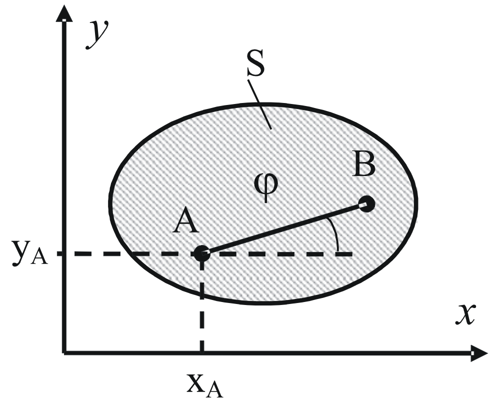


Рис. 13

Для задания положения отрезка АВ достаточно задать координаты x и y, точки А, а также угол φ между АВ и осью x. Для задания движения сечения S надо задать три функции, определяющие x, y и φ в каждый момент времени. Таким образом, уравнения плоско-параллельного движения имеют вид:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t) \\ y_A = f_2(t). \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

Зная эти уравнения, можно написать уравнение движения любой точки тела. Если φ = const, то тело будет совершать поступательное движение. Следовательно, первые два уравнения его и описывают. Если x_A и y_A = const, то тело будет совершать вращательное движение, следовательно, его описывает последнее уравнение. Плоское движение можно представить как сумму двух движений: поступательного вместе с полюсом А и вращательного вокруг точки А.

1.16. Теорема о сложении скоростей при плоском движении

Теорема: *скорость любой точки тела, совершающего плоскопараллельное движение, геометрически складывается из скорости полюса (т. А) и скорости вращения этой точки вокруг полюса.*

Из рисунка 14 видно, что $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}$. Возьмем производную. Из кинематики точки известно, что $d\bar{r}_B / dt = \bar{v}_B; \quad d\bar{r}_A / dt = \bar{v}_A$.

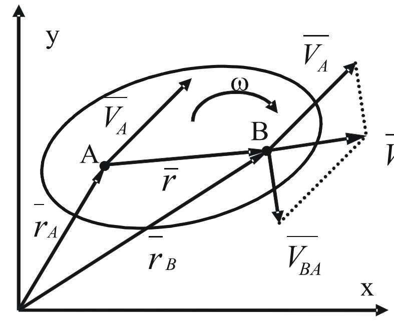


Рис. 14

Обозначим $d\overline{r}/dt = \overline{v}_{BA}$, тогда получим: $\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$ — *это и есть теорема о сложении скоростей при плоском движении.* Очевидно, $\overline{v}_{BA}$ — это скорость движения точки B, когда точка A неподвижна, то есть когда тело вращается вокруг полюса A. $\overline{v}_{BA}$ — это скорость вращения точки B вокруг полюса A. Тогда $\overline{v}_{BA} \perp$AB. По формуле Эйлера: $\overline{v}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{r}$, тогда теорема примет вид:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Данная теорема имеет два следствия.

1. Проекции скоростей двух точек тела, совершающего плоское движение, на линию, соединяющую их, равны.

2. Конец вектора скорости т. C, лежащей на отрезке AB (рис. 15), делит отрезок, соединяющий концы векторов $\overline{v}_A$ и $\overline{v}_B$, в том же отношении, в каком точка C делит отрезок AB, то есть *AB / AC = ab / ac*.

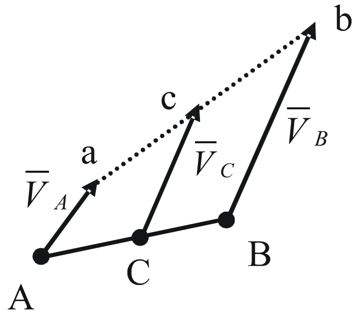


Рис. 15

1.17. Определение скорости точек с помощью МЦС

При решении задач пользоваться теоремой о сложении скоростей неудобно, для этого используют понятие мгновенного центра скоростей МЦС.

МЦС — это точка, скорость которой в данный момент времени равна 0.

Если в качестве полюса взять МЦС (точка P), то теорема о сложении скоростей примет вид: $\overline{v}_B = \overline{v}_P + \overline{v}_{BP}$ или $\overline{v}_A = \overline{v}_P + \overline{v}_{AP}$, …, но $\overline{v}_P = 0$, тогда $\overline{v}_B = \overline{v}_{BP}$, $\overline{v}_A = \overline{v}_{AP}$. Таким образом, скорость любой точки плоской фигуры определяется как скорость при ее вращательном движении вокруг МЦС, тогда $v_A = \omega \cdot AP$, $v_B = \omega \cdot BP$, …, $v_C = \omega \cdot CP$, то есть при определении скоростей можно считать, что тело вращается вокруг МЦС.

МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям 2-х точек тела (рис. 16). Если известна величина одной из скоростей, то можно найти угловую скорость и скорость любой точки сечения по формулам: $\omega = v_A / AP$, $v_B = \omega \cdot BP$, $v_C = \omega \cdot CP$, ... Очевидно, что чем ближе точка расположена к МЦС, тем меньше ее скорость.

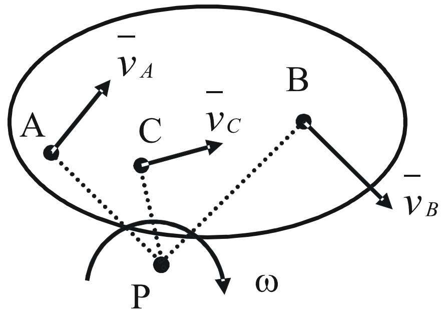


Рис. 16

Кроме того: $v_B / BP = v_C / CP = ... = v_A / AP = \omega$.

Если скорости двух точек тела параллельны, а перпендикуляры к ним не совпадают, то они пересекутся в бесконечности (рис. 17), в этом случае:

$$\omega = v_A/AP = v_A/\infty = 0.$$

Говорят, что тело совершает мгновенное поступательное движение. В этом случае скорости всех точек тела равны и параллельны.

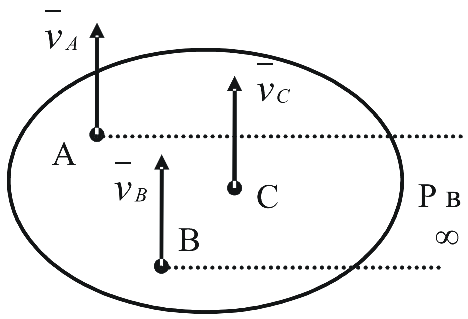


Рис. 17

Если скорости двух точек тела параллельны, а перпендикуляры к ним совпадают, то для определения положения МЦС надо знать величины скоростей 2-х точек тела. В этом случае МЦС находится на пересечении перпендикуляра к скоростям и линии, проходящей через концы векторов скоростей (рис. 18).

Рис. 18

Расстояние от т. B до МЦС можно определить из подобия треугольников AaP и BbP: $v_A/v_B = (AB + BP) / BP$. Отсюда: $BP = v_B \cdot AB / (v_A - v_B)$. Зная BP, можно найти $\omega = v_B / BP$, а затем скорость любой точки. Например: $v_C = \omega \cdot CP$.

Аналогично решается задача в случае, когда скорости двух точек параллельны и направлены в противоположные стороны.

МЦС тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности, находится в точке соприкосновения тела и поверхности (рис. 19).

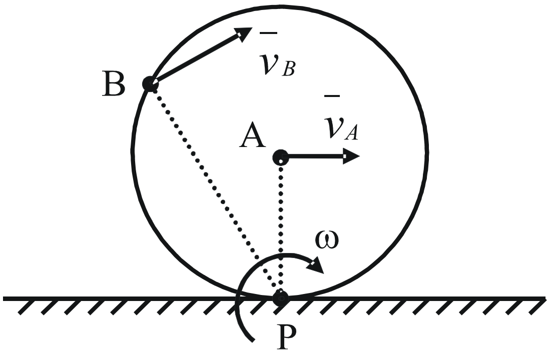


Рис. 19

В этом случае надо знать скорость хотя бы одной точки, тогда: $\omega = v_A / AP$; $v_B = \omega \cdot BP$ и т.д.

1.18. Теорема о сложении ускорений

Теорема: *ускорение точки тела, совершающего плоское движение, геометрически складывается из ускорения точки, выбранной за полюс, нормального и тангенциального ускорений при вращении этой точки вокруг полюса:*

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}.$$

Воспользуемся теоремой о сложении скоростей:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.$$

Возьмем производную.

Тогда поскольку:

$$d\bar{v}_A / dt = \bar{a}_A \quad \text{и} \quad d\bar{v}_B / dt = \bar{a}_B,$$

$$\text{то } \bar{a}_B = \bar{a}_A + d\bar{\omega}/dt \times \bar{r} + \bar{\omega} \times d\bar{r}/dt,$$

$$\text{но } d\bar{\omega}/dt = \bar{\varepsilon} \quad \text{и} \quad d\bar{r}/dt = \bar{v}_{BA},$$

$$\text{тогда } \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega}\left[\bar{\omega} \times \bar{r}\right] = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n},$$

где $\bar{a}_{BA}^{n}$ — вектор нормального (центростремительного) ускорения при вращении точки B вокруг точки A. Он направлен от точки B к точке A (рис. 20);

$\bar{a}_{BA}^{\tau}$ — вектор тангенциального (касательного) ускорения при вращении точки B вокруг точки A.

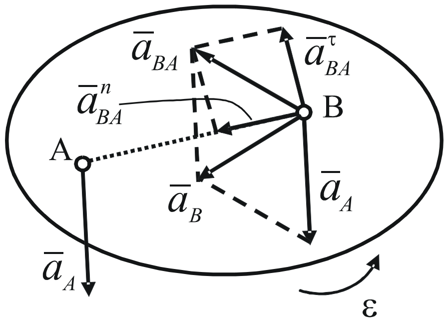


Рис. 20

Он направлен перпендикулярно AB в сторону углового ускорения ε. По величине: $a_{BA}^{n} = \omega^{2} \cdot AB$; $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB$.

1.19. Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей

Сложным называется такое движение точки, при котором она одновременно участвует в нескольких движениях. *Абсолютным* движением называется движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета. *Относительным* называется движение точки по отношению к подвижной системе отсчета. *Переносным* называется движение той точки подвижной системы отсчета, в которой находится движущаяся точка по отношению к неподвижной. Проще можно сказать: относительным движением называется движение точки по телу, а переносным движением — движение точки вместе с телом.

Скорость и ускорение точки по отношению к неподвижной системе отсчета называются абсолютными (v, a). Скорость и ускорение точки по отношению к подвижной системе отсчета называются относительными (v_r, a_r). Скорость и ускорение той точки подвижной системы, в которой находится движущаяся точка, по отношению к неподвижной системе называются переносными (v_e, a_e).

Теорема: *скорость точки в абсолютном движении геометрически складывается из переносной и относительной скорости:*

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_e .$$

Например, на рисунке 21 точка M совершает сложное движение: вращается вместе с диском — переносное движение и двигается по хорде диска — относительное движение.

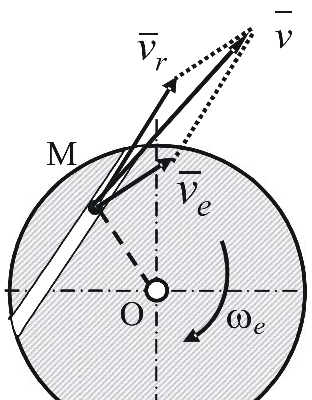


Рис. 21

При этом переносная скорость v_e направлена перпендикулярно отрезку ОМ в сторону переносной угловой скорости ω_e, а ее величина может быть найдена по формуле:

$$v_e = \omega_e \cdot OM.$$

Абсолютную скорость точки М можно найти по теореме косинусов:

$$v^2 = v_r^2 + v_e^2 + 2v_r \cdot v_e \cdot \cos\alpha,$$

где α — угол между векторами v_e и v_r.

1.20. Теорема о сложении ускорений при сложном движении

Теорема: *абсолютное ускорение точки геометрически складывается из переносного, относительного и кориолисова ускорений:*

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c,$$

где $\bar{a}_e$ — переносное ускорение;

$\bar{a}_r$ — относительное ускорение;

$\bar{a}_c$ — ускорение Кориолиса:

$$\bar{a}_c = 2[\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r].$$

Модуль ускорения можно найти по формуле:

$$|\bar{a}_c| = 2|\omega_e||v_r|\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\bar{\omega}_e$ и $\bar{v}_r$, в рассматриваемом случае этот угол равен 90°, так как вектор угловой скорости направлен перпендикулярно плоскости рисунка от нас.

Для определения направления $\bar{a}_c$ можно пользоваться правилом векторного умножения или правилом Жуковского: *для определения направления ускорения Кориолиса надо спроецировать вектор относительной линейной скорости на плоскость $\perp$ оси переносного вращения и повернуть эту проекцию в этой плоскости на угол 90° в направлении переносной угловой скорости.*

Ускорение Кориолиса равно нулю, если:

1) $\bar{\omega}_e = 0$, т.е. переносное движение будет поступательным;
2) $\bar{v}_r = 0$, т.е. точка неподвижна по отношению к подвижной системе отсчета;
3) $\bar{\omega}_e \parallel \bar{v}_r$, точка движется параллельно оси переносного вращения.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Кинематика — раздел теоретической механики, изучающий движение точки и тел безотносительно к причинам, его вызывающим. Для выполнения контрольной работы следует решить 4 задачи. Решение каждой из задач необходимо начинать на *развороте тетради* (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, выполняется чертеж в соответствующем масштабе и записывается условие задачи. Текст задачи не переписывается. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, с нанесением всех размеров и обозначений. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на доработку.

При выполнении контрольных работ следует номер рисунка выбирать по последней цифре шифра, а условие задачи — в соответствующих таблицах по предпоследней цифре шифра.

Пример: если шифр 892341, то при решении задачи К1 следует взять рисунок 1.1, а условие № 4.

2.1. Задача К1

По заданным уравнениям движения точки в плоскости *xy*: $x = f_1(t), y = f_2(t)$ (табл. 1) требуется найти уравнение траектории и для момента времени $t_1 = \pi/6$ с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории. Построить на рисунке все найденные скорости и ускорения в соответствующих масштабах.

Указание. Задача К1 относиться к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки. В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = \pi/6$ с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует применить известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha; \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

При выборе масштабов построения траектории, скоростей и ускорений следует учитывать, что они должны быть стандартными, то есть из ряда: 1; 2; 2,5; 4; 5; … При этом изображаемые вектора должны быть достаточно крупными (50-100 мм).

Таблица 1

Параметры для решения задачи К1

Последняя цифра шифра	$x = f_1(t)$, см	Предпоследняя цифра шифра	$y = f_2(t)$, см
0	$3\sin(2t) + 1$	0	$2 - 2\cos(2t)$
1	$2\sin^2(2t) - 2$	1	$3\cos^2(2t) - 1$
2	$4\sin(2t) - 1$	2	$2\cos(4t) + 2$
3	$3 - 4\cos(2t)$	3	$3\sin(2t) - 1$
4	$4\cos^2(2t) - 2$	4	$2\sin^2(2t) + 1$
5	$\cos(4t) + 1$	5	$2\sin(2t) - 3$
6	$2\sin^2(2t) - 1$	6	$3 - 2\cos(2t)$
7	$2\cos(4t) + 1$	7	$2\cos(4t) + 1$
8	$3\cos^2(2t) - 2$	8	$2\sin^2(2t) + 1$
9	$2 + 3\cos(4t)$	9	$2 - 2\cos(4t)$

Пример решения задачи К1

Дано: уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\,cos(\pi t/4) + 3;\; y = 2\,sin(\pi t/8) - 1$$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах).

Определить: уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение:

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos(\pi t/4) = 1 - 2\sin^2(\pi t/8).$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций, тогда получим:

$$\cos(\pi\, t/4) = (3 - x)/2, \qquad \sin(\pi\, t/8) = (y + 1)/2;$$

следовательно: $$(3 - x)/2 = 1 - 2(y + 1)^2/4.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (рис.): $x = (y + 1)^2 + 1$.

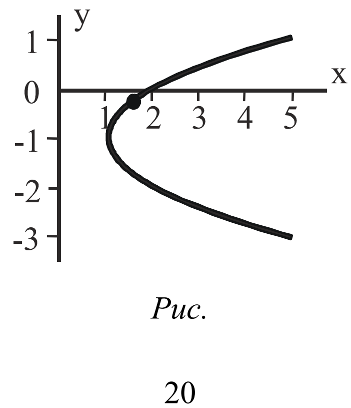


Рис.

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin(\pi t/4); \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos(\pi t/8); \quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2};$$

и при $t = 1$ с: $\upsilon_x = 1{,}11$ см/с, $\upsilon_y = 0{,}73$ см/с, $\upsilon = 1{,}33$ см/с.

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right); \; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

и при $t = 1$ с: $a_x = 0{,}87$ см/с^2, $a_y = -0{,}12$ см/с^2, $a = 0{,}88$ см/с^2.

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}.$$

Получим: $$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon_x a_x + \upsilon_y a_y}{\upsilon}.$$

Подставив полученные ранее значения, найдем, что при $t = 1$ с: $a_\tau = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t = 1$ с: $a_n = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории:

$$\rho = \upsilon^2 / a_n.$$

Подставляя сюда числовые значения υ_1 и a_{1n}, найдем, что при $t = 1$ с: $\rho = 3{,}05$ см.

При построении скоростей следует в данном случае выбрать масштаб $\mu_v = 0{,}02 \ \frac{\text{см/с}}{\text{мм}}$.

Тогда $l_{vx} = |v_x| / \mu_v = 1{,}11/0{,}02 \approx 56$ мм,
$l_{vy} = |v_y| / \mu_v = 0{,}73/0{,}02 \approx 37$ мм;

или $\mu_v = 0{,}01 \ \frac{\text{см/с}}{\text{мм}}$,

тогда $l_{vx} = |v_x| / \mu_v = 1{,}11/0{,}01 = 111$ мм,
$l_{vy} = |v_y| / \mu_v = 0{,}73/0{,}01 = 73$ мм.

При построении ускорений следует выбрать масштаб $\mu_a = 0{,}01 \ \frac{\text{см/с}}{\text{мм}}$.

Тогда $l_{ax} = |a_x| / \mu_a = 0{,}87/0{,}01 = 87$ мм,
$l_{ay} = |a_y| / \mu_a = 0{,}12/0{,}01 = 12$ мм;
$l_{a\tau} = |a_\tau| / \mu_a = 0{,}66/0{,}01 = 66$ мм,
$l_{an} = |a_n| / \mu_a = 0{,}58/0{,}01 = 58$ мм.

Найденные длины отрезков откладываем из точки с координатами: при $t = 1$ с: $x = -2\cos(\pi/4) + 3 = 1{,}6$ см; $y = 2\sin(\pi/8) - 1 = -0{,}23$ см.

Примечание. При построении следует учесть, что l_{ay} необходимо отложить вниз, так как $a_y < 0$, а a_τ — по направлению скорости, так как $a_\tau > 0$.

2.2. Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес *1-3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2.0-2.9, табл. 2). Радиусы ступеней равны соответственно: у колеса *1* — r_1 = 2 см, R_1 = 4 см, у колеса *2* — r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса *3* — r_3 = 12 см, R_3 = 16 см. На ободьях колес расположены точки А, В и С.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ — закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ — закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ — закон изменения угловой скорости колеса *2*, $\upsilon_5(t)$ — закон изменения скорости груза *5* и т.д. (везде φ выражено в радианах, s — в сантиметрах, t — в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4, s_5 и υ_4, υ_5 — вниз.

Определить в момент времени t_1 = 2 с указанные в таблице 2 в столбцах «Найти» скорости (υ — линейные, ω — угловые) и ускорения (a — линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел (υ_5 — скорость груза *5* и т.д.).

Указание. Задача К2 — на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица 2

Параметры для решения задачи К2

Последняя цифра шрифта	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	υ_B, υ_A	ε_2, a_A, a_4
1	$\upsilon_4 = 2(t^2 - 3)$	υ_A, υ_B	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_3 = 2t^2 - 9$	υ_4, ω_2	ε_2, a_A, a_4
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	υ_4, ω_3	ε_2, a_B, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	υ_4, ω_3	ε_3, a_B, a_4
5	$\omega_3 = 5t - 2t^2$	υ_4, υ_B	ε_2, a_A, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	υ_4, ω_3	ε_3, a_A, a_4
7	$\upsilon_4 = 3t^2 - 8$	υ_A, ω_2	ε_2, a_B, a_4
8	$s_4 = 2t^2 - 5t$	υ_A, ω_2	ε_3, a_B, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	υ_4, υ_B	ε_2, a_A, a_4

Рисунки к вариантам заданий

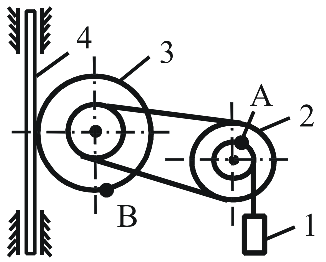


Рис. 2.0

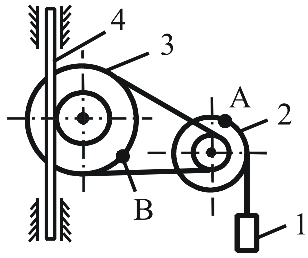


Рис. 2.1

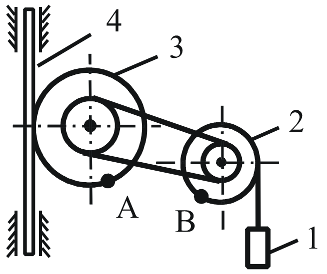


Рис. 2.2

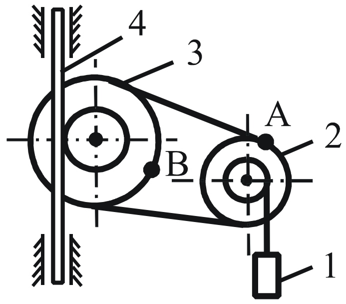


Рис. 2.3

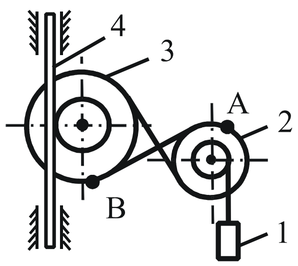


Рис. 2.4

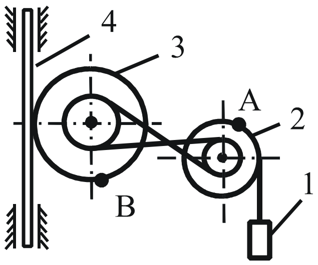


Рис. 2.5

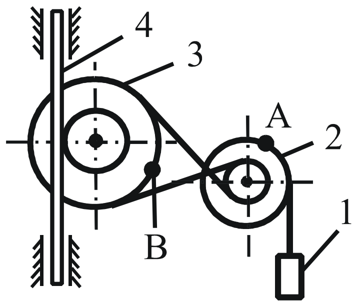


Рис. 2.6

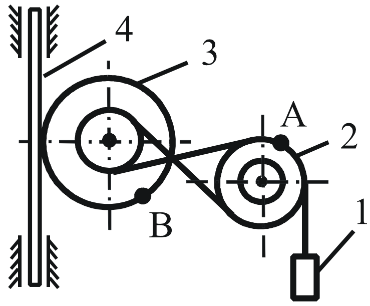


Рис. 2.7

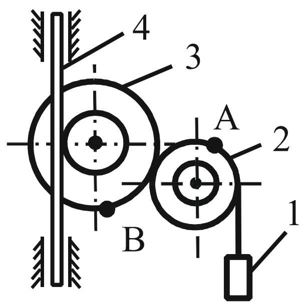


Рис. 2.8

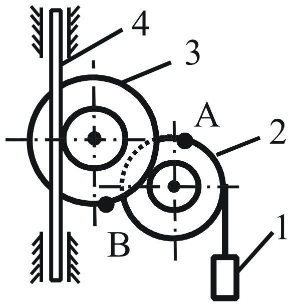


Рис. 2.9

Пример решения задачи К2

Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами R_2 и r_2 и колесо *3* радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. 2.10). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

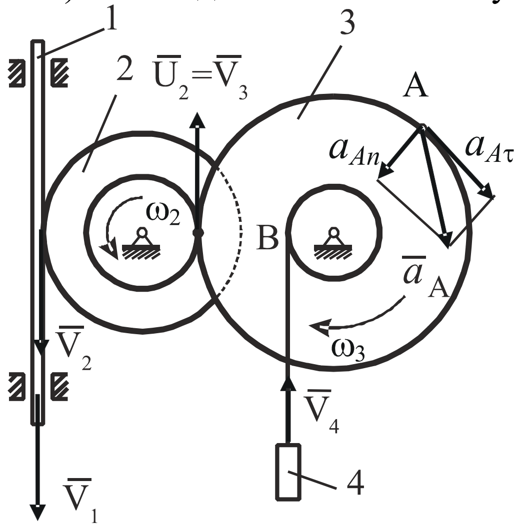


Рис. 2.10

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s — в сантиметрах, t — в секундах), A — точка обода колеса *3*, $t_1 = 3$ с.

Определить: ω_3, υ_4, ε_3, α_A в момент времени $t = t_1$.

Решение:

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через υ_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), — через u_i.

1. Определим сначала угловые скорости как функции времени t. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость:

$$\upsilon_1 = s_1 = 9t^2.$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $\upsilon_2 = \upsilon_1$ или $\omega_2 R_2 = \upsilon_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = \upsilon_3$ или $\omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим:

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \qquad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2.$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим: $\omega_3 = 6{,}75$ с$^{-1}$.

2. Определим υ_4. Так как $\upsilon_4 = \upsilon_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с: $\upsilon_4 = 20{,}25$ см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая, что $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с получим $\varepsilon_3 = 4{,}5$ с$^{-2}$.

4. Определяем a_A. Для точки А: $\overline{a_A} = \overline{a}_{A\tau} + \overline{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с, имеем: $a_{A\tau} = 36$ см/с^2, $a_{An} = 364{,}5$ см/с^2, $a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3$ см/с^2.

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рисунке 2.10.

2.3. Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна В или Е (рис. 3.0-3.7) или из стержней *1*, *2*, *3* и ползунов В и Е (рис. 3.8, 3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длина стержней: l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 1,4 м, l_4 = 0,6 м. Положение механизма определяется углами α, β, γ, φ, θ. Значения этих углов и других заданных величин указаны в таблице 3.1 (для рис. 3.0-3.4) или в таблице 3.2 (для рис. 3.5-3.9); при этом в таблице 3.1 ω_1 и ω_4 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рисунке 3.8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рисунке 3.9 — против хода часовой стрелки и т.д.). Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как на рисунке 3.10, *б*. Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{\upsilon}_B$ и ускорение $\overline{a}_B$ — от точки В к b (см. на рис. 3.5-3.9).

У к а з а н и е. Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности. При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}$, где А — точка, ускорение $\overline{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то $\overline{a}_A = \overline{a}_A + \overline{a}_A^{\tau}$); В — точка, ускорение $\overline{a}_B$ которой нужно определить (если точка В движется по дуге окружности радиуса l, то $\overline{a}_B = \overline{a}_B^{\tau} + \overline{a}_B^{\tau}$, где численно $a_B^n = \upsilon_B^2 / l$; входящая сюда скорость υ_B определяется так же, как и скорости других точек механизма).

Таблица 3.1

Параметры для решения задачи К3 (к рис. 3.0-3.4)

Последняя цифра шифра	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	–	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	–	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	–	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	–	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	–	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	–	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	–	2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	–	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	–	8	A, E	DE	A	AB

Таблица 3.2

Параметры для решения задачи К3 (к рис. 3.5-3.9)

Последняя цифра шифра	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	v_B, м/с	a_B, м/с^2	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	–	–	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	–	–	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	–	–	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	–	–	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	–	–	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	–	–	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	–	–	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	–	–	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	–	–	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	–	–	5	4	D, E	AB	A	AB

Рисунки к вариантам заданий

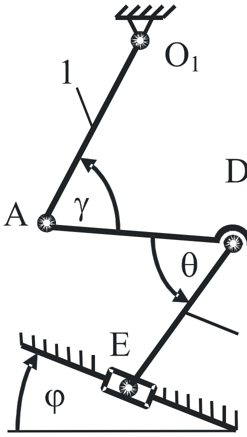


Рис. 3.0

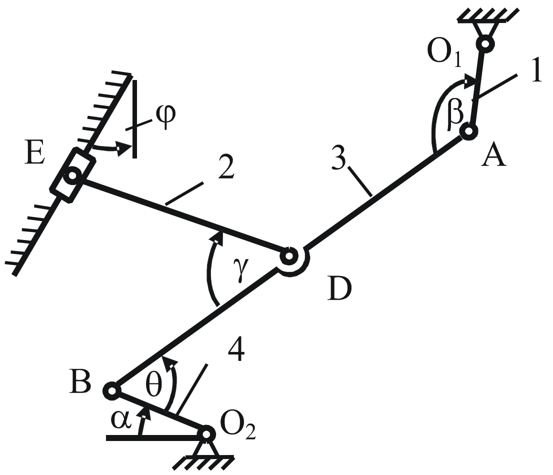


Рис. 3.1

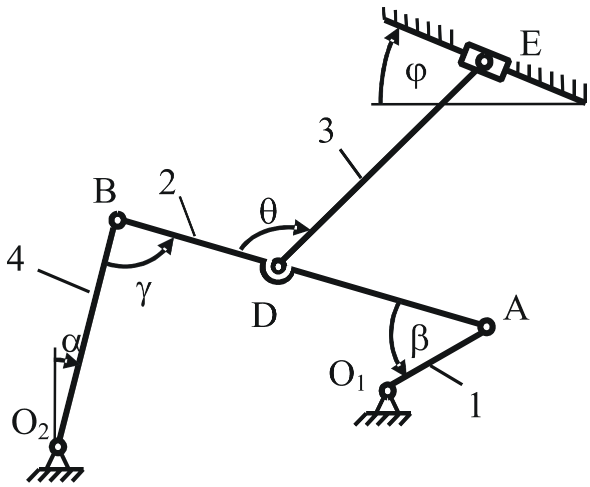


Рис. 3.2

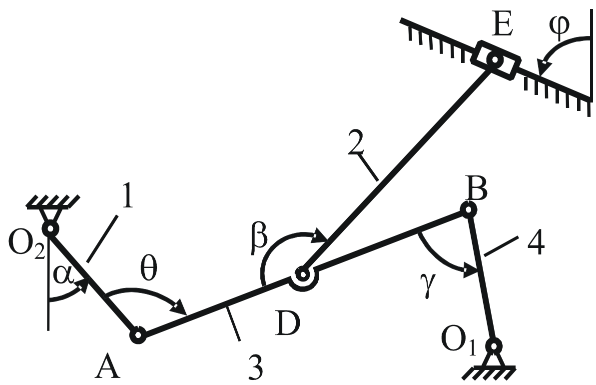


Рис. 3.3

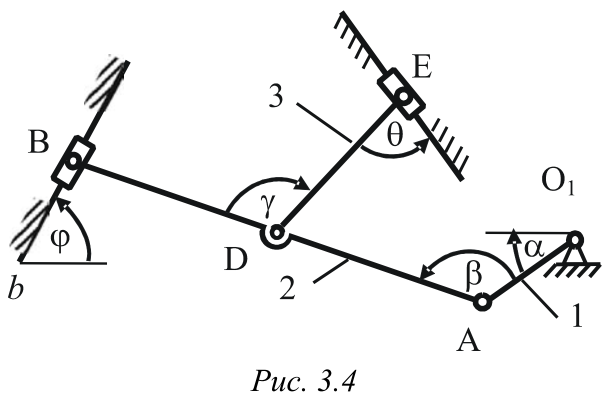


Рис. 3.4

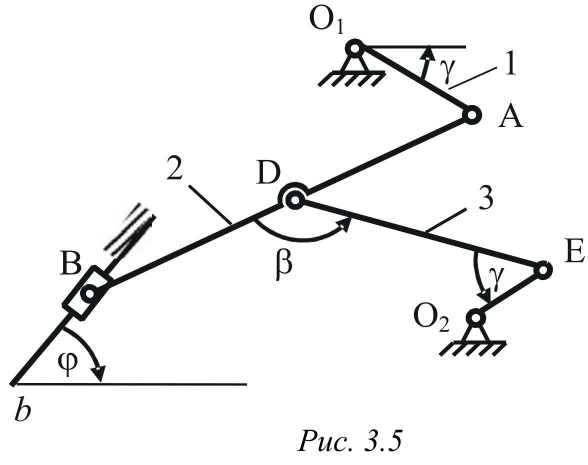


Рис. 3.5

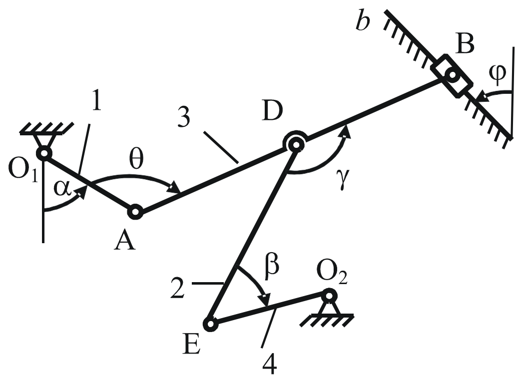


Рис. 3.6

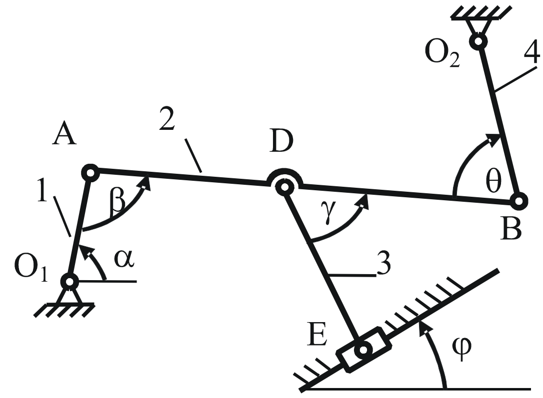


Рис. 3.7

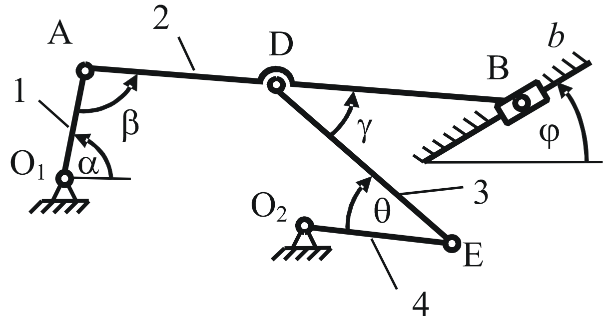


Рис. 3.8

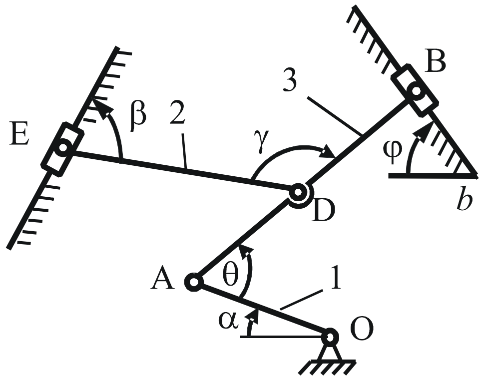


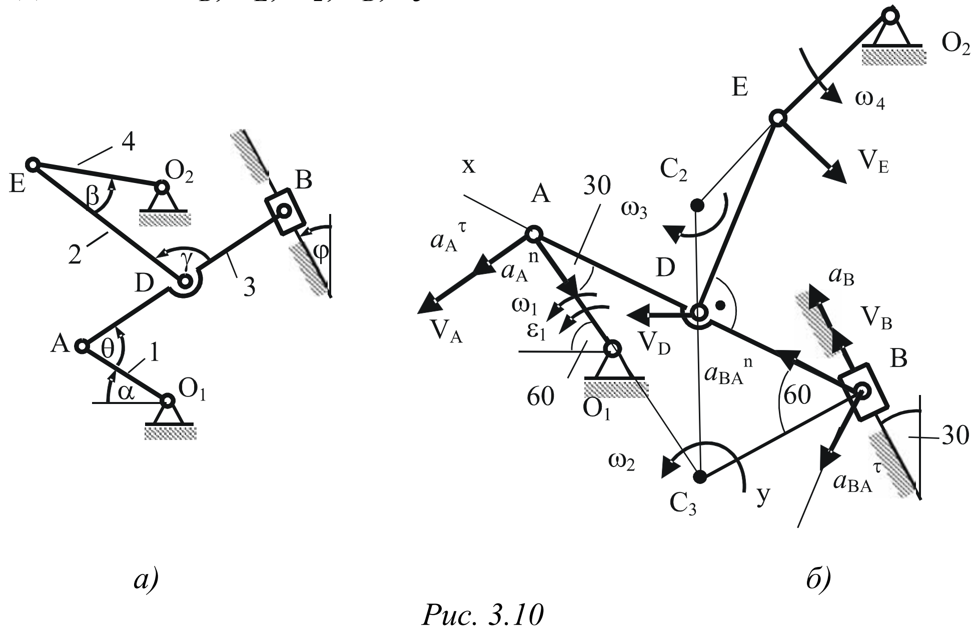
Рис. 3.9

Пример решения задачи К3

Механизм (рис. 3.10, *а*) состоит из стержней *1*, *2*, *3*, *4* и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, AD = DB, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направление ω_1 и ε_1 — против хода часовой стрелки).

Определить: υ_B, υ_E, ω_2, a_B, ε_3.



а) б)

Рис. 3.10

Р е ш е н и е:

1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (см. рис. 3.10, *б*).

2. Определяем υ_B. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти υ_B, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\overline{\upsilon}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_I, можем определить $\overline{\upsilon}_A$; численно

$$\upsilon_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8\,\text{м/с}; \qquad \overline{\upsilon_A} \perp O_1 A.$$

Направление $\overline{\upsilon}_B$ найдем, учтя, что точка В принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь зная $\overline{\upsilon}_A$ и направление $\overline{\upsilon}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня АВ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая АВ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{\upsilon}_B$ *(проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки).* Затем, вычисляя эти проекции, находим:

$$\upsilon_B \cos 30° = \upsilon_A \cos 60° \quad \text{и} \quad \upsilon_B = 0{,}46\,\text{м/с}.$$

3. Определяем $\overline{\upsilon}_E$. Точка Е принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{\upsilon}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню АВ. Для этого, зная $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, строим мгновенный центр скоростей МЦС стержня АВ; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_B$, восстановленных из точек А и В (к $\overline{\upsilon}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\overline{\upsilon}_A$ определяем направление поворота стержня АВ вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{\upsilon}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину υ_D найдем из пропорции

$$\frac{\upsilon_D}{C_3 D} = \frac{\upsilon_B}{C_3 B}.$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B, заметим, что ΔAC_3B прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30 и 60°, и что C_3B = ABsin30° = 0,5AB = BD. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате получим:

$$\upsilon_D = \upsilon_B = 0{,}46\,\text{м/с}; \qquad \overline{\upsilon}_D \perp C_3 D.$$

Так как точка Е принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{\upsilon}_E \perp O_2 E$. Тогда, восстанавливая из точек Е и D перпендикуляры к скоростям $\overline{\upsilon}_E$ и $\overline{\upsilon}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{\upsilon}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор

$\bar{\upsilon}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рисунка 3.10, *б* видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что:

$$\frac{\upsilon_E}{C_2E} = \frac{\upsilon_D}{C_2D}, \quad \upsilon_E = \upsilon_D = 0{,}46\,\text{м/с}.$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$$C_2D = \frac{l_2}{2\cos 30°} = 0{,}69 \text{ м}, \quad \omega_2 = \frac{\upsilon_D}{C_2D} = 0{,}67\,c^{-1}.$$

5. Определяем $\bar{a}_B$. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня АВ и траекторию точки В. По данным задачи можем определить $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$, где численно:

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2; \qquad a_A^{n} = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \tag{9}$$

Вектор $\bar{a}_A^{n}$ направлен вдоль $АО_1$, а $\bar{a}_A^{\tau}$ перпендикулярно ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{\upsilon}_B$. Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством:

$$\overline{a_B} = a_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}. \tag{10}$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^{n}$ (вдоль ВА от В к А) и $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a_{BA}^{n} = \omega_3^2 \cdot l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС — C_3 стержня *3*, получим:

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_A}{C_3A} = \frac{\upsilon_A}{l_3 \cos 30°} = 0{,}66\,c^{-1} \text{ и } a_{BA}^{n} = 0{,}61\,\text{м/с}^2. \tag{11}$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (10), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^{τ}. Их можно найти, спроектировав обе части равенства (10) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроектируем обе части равенства (10) на направление АВ (ось х), перпендикулярное неизвестному вектору a_{BA}^{τ}. Тогда получим:

$$a_B \cos 30° = a_A^{\tau} \cos 60° - a_A^{n} \cos 30° + a_{BA}^{n}. \tag{12}$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (9) и (11), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \tag{13}$$

Так как $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\overline{a_B}$ направлен, как показано на рисунке 3.10, *б*.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^{τ}. Для этого обе части равенства (10) спроектируем на направление, перпендикулярное АВ (ось y). Тогда получим:

$$-a_B \sin 30° = a_A^{\tau} \sin 60° + a_A^n \sin 30° + a_{BA}^{\tau}. \tag{14}$$

Подставив в равенство (14) числовые значения всех величин из (13) и (9), найдем, что a_{BA}^{τ} = –3,58 м/с^2. Знак указывает, что направление a_{BA}^{τ} противоположно показанному на рисунке 3.10, *б*.

Теперь из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 l_3$ получим:

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{l_3} = 2{,}56\ c^{-2}.$$

Ответ: υ_B = 0,46 м/с; υ_E = 0,46 м/с; ω_2 = 0,67 с$^{-1}$; a_B = 0,72 м/с^2; ε_3 = 2,56 с$^{-2}$.

2.4. Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. 4.0-4.5) или круглая пластина радиуса R = 60 см (рис. 4.6-4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в таблице 4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рисунках 4.0, 4.1, 4.2, 4.6, 4.9 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости); на рисунках 4.3, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве). По пластине вдоль прямой BD (рис. 4.0-4.5) или по окружности радиуса R (рис. 4.6-4.9) движется точка М; закон ее относительного движения, т.е. зависимость s = AM = $f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t — в секундах), задан в таблице 4 отдельно для рисунков 4.0-4.5 и для рисунков 4.6-4.9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка М показана в положении, при котором s = AM > 0 (при s < 0 точка М находится с противоположной стороны). Требуется определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с.

Указание. Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и ускорений при сложном движении. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка М на пластине в момент времени t_1 = 1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче). В случаях, относящихся к рисункам 4.6-4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будет определено положение точки М в момент времени t_1 = 1 с (с помощью угла между радиусами СМ и СА в этот момент).

Примечание. В задачах на рисунках 4.3, 4.4, 4.7, 4.8 вектора $\overline{\upsilon}_{ПЕР}$, $\overline{a}_{ПЕР}^{\tau}$ и $\overline{a}_{КОР}$ направлены перпендикулярно плоскости рисунка, поэтому в этих вариантах следует выбрать оси xyz, считая ось z направленной на нас. Направление на нас изображается значком $\odot$, а от нас: $\otimes$.

Таблица 4

Параметры для решения задачи К4

Последняя цифра шифра	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рисунков 4.0-4.5		Для рисунков 4.6-4.9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$2\pi R(4t^2 - 2t^3) / 3$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4/3\ R$	$3\pi R(2t^2 - t^3) / 2$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$2\pi R(2t^2 - 1) / 3$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$5\pi R(3t - t^2) / 6$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$2\pi R(t^3 - 2t) / 3$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\pi R(t^3 - 4t) / 6$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$3/4\ R$	$\pi R(t^3 - 2t^2) / 2$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\pi R(t - 5t^2) / 6$
8	$2t^3 - 11t$	10	$15(5t^3 - t) - 30$	R	$2\pi R(3t^2 - 1) / 3$
9	$6t - 3t^3$	20	$40(t - 2t^2) - 40$	$4/3\ R$	$4\pi R(t^2 - 2t^3) / 3$

Рисунки к вариантам заданий

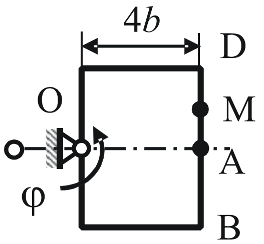


Рис. 4.0

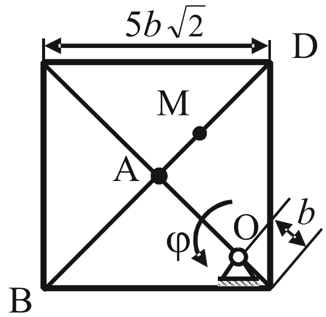


Рис. 4.1

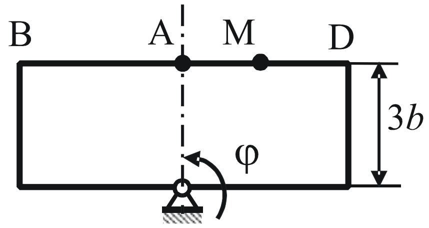


Рис. 4.2

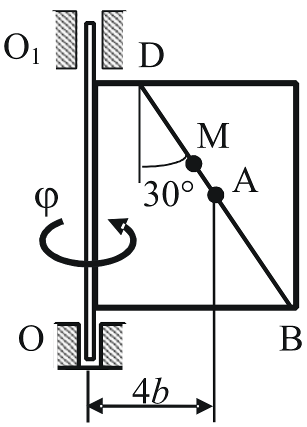


Рис. 4.3

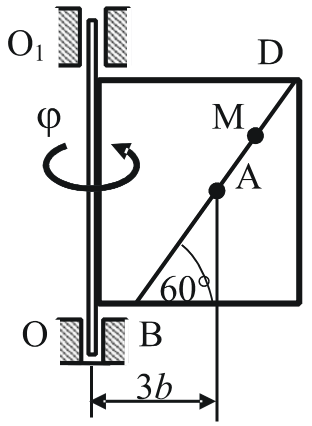


Рис. 4.4

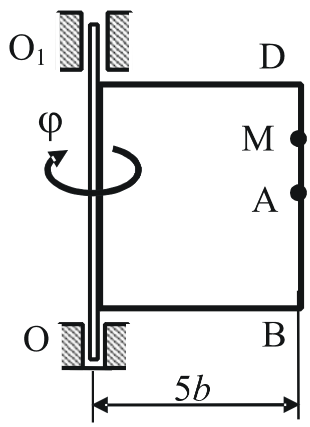


Рис. 4.5

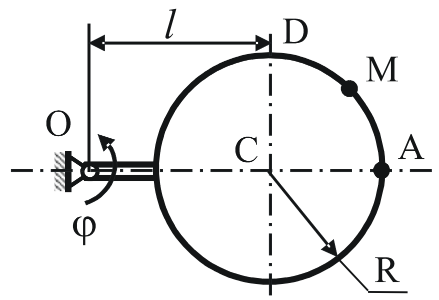


Рис. 4.6

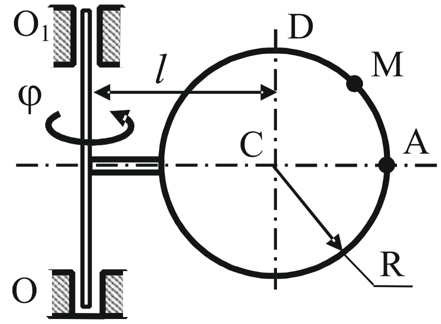


Рис. 4.7

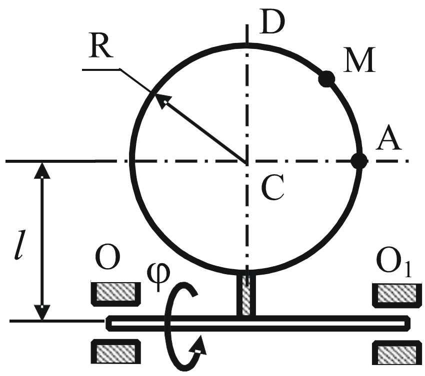


Рис. 4.8

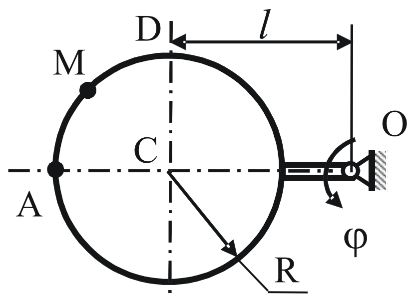
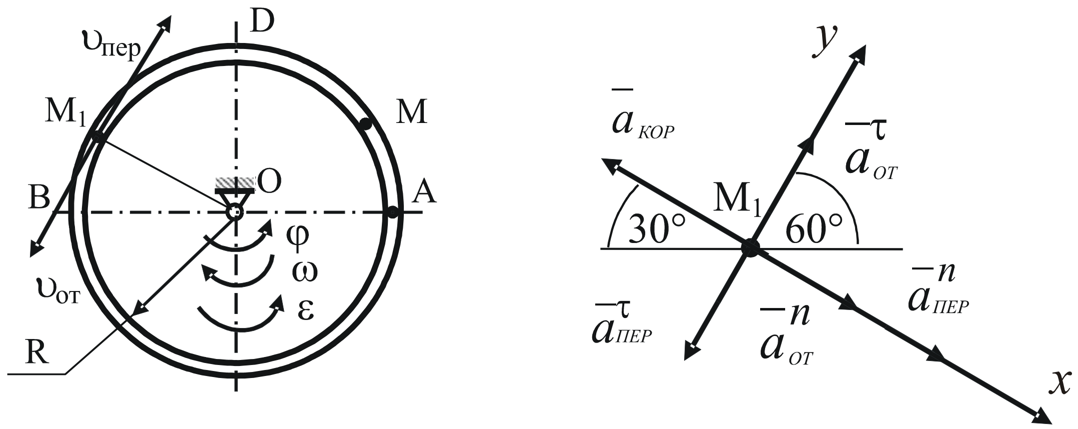


Рис. 4.9

Пример решения задачи К4

Диск радиуса R (рис. 4.10, *а*) вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке 4.10, *а* дуговой стрелкой). По ободу ADB движется точка M по закону s = AM = $f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D.



а) *б)*

Рис. 4.10

Дано: R = 0,5 м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ — в радианах, s — в метрах, t — в секундах).

Определить: $\upsilon_{аб}$ и $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

Р е ш е н и е:

Рассмотрим движение точки М как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным, а вращение диска — переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{\upsilon}_{аб}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{аб}$ точки найдутся по формулам:

$$\bar{\upsilon}_{аб} = \bar{\upsilon}_{ОТ} + \bar{\upsilon}_{ПЕР}, \quad \bar{a}_{аб} = \bar{a}_{ОТ} + \bar{a}_{ПЕР} + \bar{a}_{кор},$$

где, в свою очередь, $\bar{a}_{ОТ} = \bar{a}^{\tau}_{ОТ} + \bar{a}^{n}_{ОТ}, \quad \bar{a}_{ПЕР} = \bar{a}^{\tau}_{ПЕР} + \bar{a}^{n}_{ПЕР}$.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. *Относительное движение.* Это движение происходит по закону:

$$s = AM = (\pi R/6)(7t - 2t^2). \tag{15}$$

Сначала установим, где находится точка М на дуге ADB в момент времени t_1. Полагая в уравнении (15) $t = 1$ с, получим $s_1 = \frac{5}{6}\pi R$. Тогда $\angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150^{\circ}$ или $\angle BCM = 30°$.

Изображаем на рисунке 4.10, *а* точку M_1 в положении, определяемом этим углом.

Теперь находим числовые значения $\upsilon_{ОТ}$, $a^{\tau}_{ОТ}$, $a^{n}_{ОТ}$:

$$\upsilon_{OT} = \dot{s} = (\pi R/6)(7 - 4t); \quad a^{\tau}_{OT} = \dot{\upsilon}_{OT} = -\frac{2}{3}\pi R; \quad a^{n}_{OT} = \upsilon^2_{OT}/\rho_{OT} = \upsilon^2_{OT}/R,$$

где ρ_{OT} — радиус кривизны относительно траектории, т.е. дуги ADB.

Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 0{,}5$ м, получим:

$$\upsilon_{OT} = \pi R/2 = 0{,}785 \text{ м/с}^2; \quad a^{\tau}_{ОТ} = -\pi/3 = -1{,}047 \text{ м/с}^2; \quad a^{n}_{OT} = \pi^2/8 = 1{,}234 \text{ м/с}^2. \tag{16}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{\upsilon}_{OT}$ направлен в сторону положительно отсчета расстояния s, а вектор a^{τ}_{OT} — в противоположную сторону; a^{n}_{OT} направлен к центру О дуги ADB. Изображаем все эти векторы на рисунках 4.10, *а*, *б*.

2. *Переносное движение*. Это движение (вращение) происходит по закону:

$$\varphi = 2t^3 - 4t^2.$$

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t, \; \varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8$$

и при $t_1 = 1$ с:

$$\omega = -2 \; c^{-1}; \quad \varepsilon = 4 \; c^{-2}. \tag{17}$$

Знаки указывают, что при $t_1 = 1$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рисунке 4.10, *а* соответствующими дуговыми стрелками. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (17), получим:

$$\upsilon_{ПЕР} = |\omega| R = 1 \text{ м/с}, \quad a^{\tau}_{ПЕР} = |\varepsilon| R = 2 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{ПЕР} = \omega^2 R = 2 \text{ м/с}^2. \tag{18}$$

Изображаем на рисунках 4.10, *а*, *б* векторы $\bar{\upsilon}_{ПЕР}$ и $\bar{a}^{\tau}_{ПЕР}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $a^{n}_{ПЕР}$ (направлен к оси вращения).

3. *Кориолисово ускорение*. Так как угол между вектором $\bar{\upsilon}_{ОТ}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 90˚, то численно в момент времени t_1 = 1 с (см. равенства (16) и (17)):

$$a_{КОР} = 2|\upsilon_{ОТ}||\omega|\sin 90° = 2 \cdot 0{,}785 \cdot 2 = 3{,}14 \text{ м/с}^2. \qquad (19)$$

Направление $\bar{a}_{КОР}$ найдем, спроектировав вектор $\bar{\upsilon}_{ОТ}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (то есть в данном случае никуда проецировать не надо, так как эта плоскость совпадает с плоскостью рисунка), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу часовой стрелки на 90˚. Изображаем вектор $\bar{a}_{КОР}$ на рисунке 4.10, *б*.

4. *Определение* $\bar{\upsilon}_{аб}$, $\bar{a}_{аб}$. Поскольку переносная и относительная скорости точки направлены по одной прямой в противоположные стороны, то абсолютная скорость будет равна разности их модулей:

$$|\bar{\upsilon}_{аб}| = |\bar{\upsilon}_{ПЕР}| - |\bar{\upsilon}_{ОТ}| = 1 - 0{,}785 = 0{,}215 \text{ м/с}$$

и направлена в сторону большей скорости.

По теореме о сложении ускорений:

$$\bar{a}_{аб} = \bar{a}^{\tau}_{ОТ} + \bar{a}^{n}_{ОТ} + \bar{a}^{\tau}_{ПЕР} + \bar{a}^{n}_{ПЕР} + \bar{a}_{КОР}. \qquad (20)$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси M_1xy (см. рис. 4.10, *б*) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_{аб}$ на эти оси. Тогда, проектируя обе части равенства (20) на координатные оси и учтя одновременно равенства (16), (18), (19), получим для момента времени t_1 = 1 с:

$$a_{абx} = a^{n}_{ПЕР} + a^{n}_{ОТ} - a_{КОР} = 2 + 1{,}234 - 3{,}14 = 0{,}094 \text{м/с}^2;$$
$$a_{абy} = -a^{\tau}_{ПЕР} + |a^{\tau}_{ОТ}| = -2 + 1{,}047 = -0{,}953 \text{м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени t_1 = 1 с:

$$a_{аб} = \sqrt{a^2_{абx} + a^2_{абy}} = 0{,}957 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\upsilon_{аб}$ = 0,215 м/с; $a_{аб}$ = 0,957 м/с^2.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основной

1. Бать, М.И., Джанелидзе, Г.Ю., Кельзон, А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — Т. 1, 2. — М., 1964 (и последующие издания).

2. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. — М. : Высшая школа, 1989.

3. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике : учебное пособие. — М., 1986 (и последующие издания).

4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник. — М., 1994.

5. Яблонский, А.А., Никифорова, В.М. Курс теоретической механики. — Ч. 1. — М. : Высшая школа, 1971 (и последующие издания).

Дополнительный

6. Бутенин, Н.В., Лунц, Я.Л., Меркин, Д.Р. Курс теоретической механики. — Ч. 1, 2. — М. : Наука, 1971 (и последующие издания).

7. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. — Ч. 1. — М. : Наука, 1965.

8. Лойцянский, Л.Г., Лурье, А.И. Курс теоретической механики. — Ч. 1, 2. — М.-Л. : Физматгиз, 1952.

9. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики : учебник. — М. : Наука, 1990.

10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / под ред. А.А. Яблонского. — М. : Наука, 1998.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебно-методическое издание

Теоретическая механика. Кинематика : методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ для студентов специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» и направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» очной и заочной форм обучения / сост. С.Н. Разин, А.Е. Березкина. — 3-е изд., испр. — Караваево : Костромская ГСХА, 2016. — 36 с.

Гл. редактор Н.В. Киселева
Редактор выпуска Т.В. Тарбеева

156530, Костромская обл., Костромской район, пос. Караваево, уч. городок, д. 34, КГСХА

Компьютерный набор. Подписано в печать 10/06/2016. Заказ №071. Формат 84х60/16. Тираж 100 экз. Усл. печ. л. 2,4. Бумага офсетная. Отпечатано 20/06/2016. Цена 38,00 руб.

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической типографии на цифровом дубликаторе. Качество соответствует предоставленным оригиналам.
вид издания: исправленное (электронная версия)
(редакция от 17.05.2016 № 58)

Цена 38,00 руб.

2016*071