КОСТРОМСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра физики

Методические рекомендации

по курсу «Физика»

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

Кострома
2020

Составитель: ст. преподаватель кафедры физики

Л. М. Цурикова.

Рассмотрено и рекомендовано к изданию методической комиссией факультета электрификации и автоматизации сельского хозяйства, протокол № 2 от 07.05.2001 г.

Переиздано в 2020 году с небольшими поправками.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, профессор **Д. Е. Попов.**

В пособии кратко излагаются основы метода конформных отображений и рассматриваются некоторые плоские задачи электростатики. Цель пособия – ознакомить читателя с возможностями использования функций комплексного аргумента для решения конкретных задач.

Задачи подбирались таким образом, чтобы с одной стороны их можно было просто сформулировать и легко решить методом конформных отображений, а с другой стороны, чтобы их решение (кроме первых двух) другими методами представляло несомненные трудности.

Хотелось бы надеяться, что подобная демонстрация эффективности рассматриваемого метода привлечет к нему внимание со стороны хотя бы некоторых студентов и аспирантов.

1. НЕСКОЛЬКО СЛОВ О МЕТОДЕ

Если поле зависит только от двух декартовых координат (x и y), то оно называется *плоским*. Картина такого поля неизменна во всех плоскостях, параллельных плоскости xOy. Для решения плоских задач электростатики мощный метод, а именно, метод конформных отображений, предлагает теория функций комплексной переменной. Вспомним некоторые сведения из этой теории.

Будем считать плоскость xOy комплексной плоскостью и характеризовать каждую точку этой плоскости комплексным числом (вектором) $z = x + iy$, где i – мнимая единица. Если ввести полярные координаты ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$), то любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить как в тригонометрической форме

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.1}$$

так и в показательной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}. \tag{1.2}$$

Здесь $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Пусть на некотором множестве комплексной плоскости z определена комплекснозначная функция $w = f(z)$. Это означает, что каждой точке $z = x + iy$ из этого множества поставлено в соответствие комплексное число $w = u + iv$. Таким образом, функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Здесь $u(x,y)$ является действительной частью функции $f(z)$: $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy)$, а $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$ является мнимой частью. Из сказанного следует, что *комплекснозначная функция комплексного аргумента может рассматриваться как пара действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ двух действительных аргументов x и y.*

Если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.3}$$

то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является *аналитической функцией* комплексного аргумента $z = x + iy$. Производная аналитической функции в каждой точке имеет определенное значение, не зависящее от направления, в котором она берется. Из (1.3) видно, что как функция $u(x, y)$, так и функция $v(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Теперь обратимся к электростатике. Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям:

$$rot\vec{E} = 0 \quad \text{и} \quad div\vec{E} = 0\ . \tag{1.4}$$

Первое из этих уравнений позволяет ввести скалярный потенциал поля Φ такой, что

$$\vec{E} = -grad\Phi\,. \tag{1.5}$$

(Действительно, используя векторный оператор набла ∇, легко обосновать это утверждение: $rot\vec{E} = rot(-grad\Phi) = -\nabla \times \nabla\Phi = 0$, так как векторное произведение коллинеарных векторов ∇ и $\nabla\Phi$ равно нулю).

Второе из (1.4) уравнение позволяет ввести «векторный потенциал» $\vec{A}$, согласно которому

$$\vec{E} = rot\vec{A}\,. \tag{1.6}$$

(Действительно, $div\vec{E} = div(rot\vec{A}) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$, так как скалярное произведение ортогональных векторов ∇ и $\nabla \times \vec{A}$ равно нулю).

В нашем случае вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости *xOy*. Поэтому вектор $\vec{A}$ можно выбрать так, чтобы он был всегда перпендикулярен плоскости *xOy*. Таким образом, отлична от нуля только одна компонента вектора $\vec{A}$, которую мы будем обозначать просто *A*, т. е. $A_z = A$ (отметим, что здесь под *z* подразумевается аппликата – третья декартова координата точки в пространстве).

Согласно (1.5) компоненты напряженности выражаются в виде производных от скалярного потенциала Φ следующим образом

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \tag{1.7}$$

Эти же компоненты выражаются из (1.6) через производные вектора $\vec{A}$:

$$E_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Из сравнения (1.7) и (1.8) следует

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{1.9}$$

Полученные соотношения (1.9) между производными функций $\Phi(x, y)$ и $A(x, y)$, как видно, совпадают с условиями Коши-Римана (1.3) для аналитических функций. Именно это обстоятельство и позволяет использовать теорию функций комплексной переменной для решения плоских задач.

Условия (1.9) позволяют построить две аналитические функции

$$w_1 = A + i\Phi \tag{1.10}$$

и

$$w_2 = \Phi - iA, \tag{1.11}$$

каждая из которых может рассматриваться в качестве *комплексного потенциала*.

Продифференцируем w_1 и w_2 по комплексной переменной z в направлении оси Ox, т. е. положим $dz = dx$. Получим

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{\partial A}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{dw_2}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{1.12}$$

Используя выражения (1.7) и (1.8) преобразуем (1.12) к виду

$$\frac{dw_1}{dz} = -E_y - iE_x \tag{1.13}$$

и

$$\frac{dw_2}{dz} = -E_x + iE_y. \tag{1.14}$$

В обоих случаях модуль производной от комплексного потенциала по любому направлению равен модулю напряженности поля:

$$\left|\frac{dw_1}{dz}\right| = \left|\frac{dw_2}{dz}\right| = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2} = \left|\vec{E}\right|. \tag{1.15}$$

Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \quad \text{или} \quad E_y dx - E_x dy = 0.$$

Выражая E_x и E_y, согласно (1.8), через производные от A, получим

$$\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = 0 \quad \text{или} \quad dA = 0,$$

откуда следует $A(x,y) = const$. Таким образом, *линии постоянных значений функции* A *(действительной части функции* w_1 *или мнимой части функции* w_2*) представляют собой силовые линии поля.*

Соответственно, *линии постоянных значений скалярного потенциала* Φ *(мнимой части функции* w_1 *или действительной части функции* w_2*) являются эквипотенциальными линиями.*

Предположим, что электрическое поле создается заряженным проводником с потенциалом Φ_0. Пусть линия L есть контур сечения этого проводника плоскостью xOy (напомним о том, что рассматривается плоская задача). Так как поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, то линия L является эквипотенциальной линией. Предположим, что нам удалось найти такую функцию $w(z)$, действительная часть которой удовлетворяет условию $\operatorname{Re} w\big|_L = \Phi_0$, т. е. на контуре L действительная часть $w(z)$ принимает постоянное значение. Тогда $\operatorname{Re} w$ может рассматриваться в качестве искомого потенциала поля $\Phi(x,y)$. Это утверждение вытекает из теоремы единственности, согласно которой функция $\Phi(x,y)$ будет правильно описывать поле не только на эквипотенциальной линии, но и во всех точках некоторой области.

Если же функция $w(z)$ отображает эквипотенциальную линию на прямую, перпендикулярную мнимой оси, то потенциал дается мнимой частью функции $w(z)$.

С математической точки зрения функциональное соотношение $w = f(z)$ осуществляет *конформное отображение* (преобразование) плоскости комплексной переменной z на плоскость комплексной переменной w.

Теорема Гаусса-Остроградского для случае плоского поля может быть сформулирована следующим образом: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутый контур равен $\frac{q}{\varepsilon_o}$, где q – полный заряд, охватываемый этим контуром, отнесенный к единицы длины проводника вдоль оси Oz. Вблизи поверхности однородного проводника электростатическое поле нормально к поверхности проводника, причем внутри проводника поле отсутствует. Поэтому из теоремы Гаусса-Остроградского следует, что

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}, \qquad (1.16)$$

где E_n – нормальная составляющая напряженности на поверхности проводника, σ – поверхностная плотность заряда.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Пример 1. Найдем поле, создаваемое бесконечной плоской поверхностью проводника. (В реальных условиях это может быть поле, создаваемое заряженным металлическим листом в тех точках, которые находятся вдали от краев и удалены от поверхности листа на расстояния, значительно меньшие размеров листа).

Решение. Выберем систему координат таким образом, чтобы сечение поверхности проводника плоскостью xOy совпало с осью Ox, причем поверхность проводника перпендикулярна плоскости рисунка 1. Эти условия соответствуют случаю плоского поля.

На рис.1 нижняя полуплоскость ($\mathrm{Im}z \le 0$) заполнена проводящей средой. Требуется найти поле в верхней полуплоскости. В данном случае эквипотенциальная линия – $\mathrm{Im}z = 0$ – уже удовлетворяет необходимому требованию: эквипотенциальная линия перпендикулярна мнимой оси. Поэтому требуемое конформное отображение осуществляется линейной функцией $w = az + b$, где a - действительное или мнимое число, b – любое комплексное число. Так как потенциал Ф может быть определен только с точностью до постоянного слагаемого, то положим b = 0. Тогда $w = az$, откуда

$$w = a(x + iy) = ax + iay.$$

Таким образом, $\mathrm{Re}w = ax$, $\mathrm{Im}w = ay$. Уравнение эквипотенциальной линии $y = 0$. Постоянное значение при $y = 0$ принимает, как видно, мнимая часть w. Поэтому в качестве скалярного потенциала следует взять мнимую часть, а в качестве векторного – действительную часть w. Иначе говоря,

$$\Phi = ay, \quad A = ax.$$

Из условия $A = const$ получим уравнения силовых линий: $x = const$, т.е. силовые линии представлены семейством прямых, параллельных оси Oy (рис. 2). Эквипотенциальные линии – прямые, параллельные оси Ox.

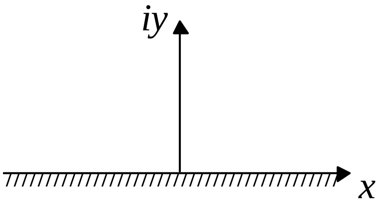

Рис. 1.

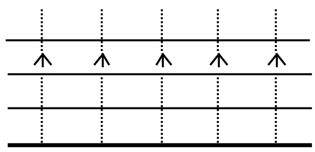
Рис. 2.

Для отыскания напряженности электростатического поля можно воспользоваться любой из трех формул (1.7), (1.8) или (1.13). Получим

$$E_x = 0, \quad E_y = -a.$$

Как видим, поле однородно. Следовательно, электрический заряд распределен по поверхности проводника равномерно.

Используя (1.16) можно выразить постоянную a через плотность заряда: $-a=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$. Таким образом, $\Phi=-\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}y$, $E_y=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}$.

В качестве упражнения рекомендуем решить самостоятельно эту же задачу, выбрав комплексный потенциал в виде $w=iaz$.

Пример 2. Найдем поле между двумя бесконечными плоскопараллельными проводниками.

Решение. Обозначим расстояние между пластинами через d, разность потенциалов на пластинах – через U (рис. 3). Как и в предыдущей задаче комплексный потенциал ищем в виде

$$w=az,$$

где a – действительное число. Тогда $\Phi=ay$, $A=ax$. Таким образом, опять силовые линии – прямые, перпендикулярные проводнику, а эквипотенциали – прямые, параллельные проводнику (рис. 4). Постоянную a найдем из условия

$$U=a(y_2-y_1),$$

откуда, учитывая, что $y_2-y_1=d$, получим

$$a=\frac{U}{d}.$$

И окончательно, напряженность поля между пластинами

$$E_x=-\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0,\quad E_y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-a=-\frac{U}{d}.$$

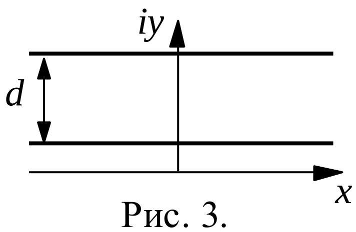

Рис. 3.

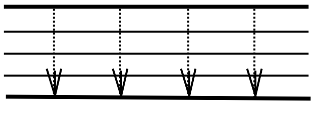
Рис. 4.

Поле однородно, заряды распределены по поверхности пластин равномерно.

Пример 3. Найдем поле внутри прямого двугранного угла, образованного проводящими стенками.

Решение. Совместим ребро угла с осью Oz так, чтобы одна грань прошла по оси Ox, а другая – по оси Oy (рис. 5). Тогда на плоскости xOy положительные полуоси являются эквипотенциалями. Наша задача состоит в отыскании такой функции $w = f(z)$, которая отображает первую четверть плоскости z ($x > 0$, $y > 0$) на верхнюю полуплоскость плоскости w.

Воспользуемся полярными координатами и показательным представлением комплексного числа: $z = \rho e^{i\varphi}$. Легко видеть, что функция $w = z^2$ переводит луч $\arg z = \alpha$ в луч $\arg w = 2\alpha$. Поэтому эта функция конформно отображает сектор $0 < \arg z < \pi/2$ на сектор $0 < \arg w < \pi$, т. е. на верхнюю

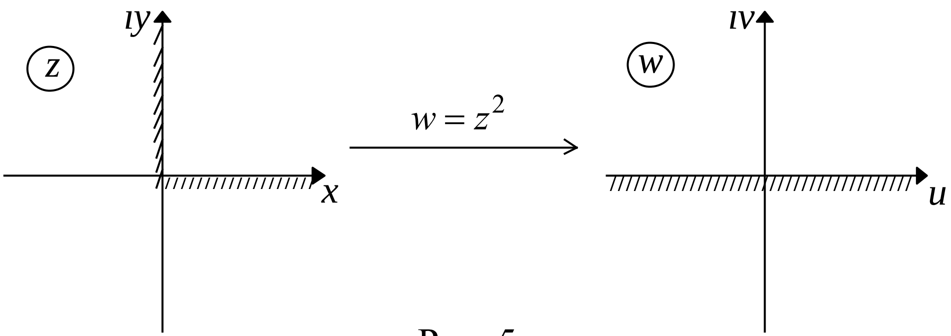

Рис. 5.

полуплоскость плоскости w. При этом лучи, образующие эквипотенциаль, переходят в прямую $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 5). Таким образом, комплексный потенциал ищем в виде

$$w = az^2, \tag{2.1}$$

где a – действительное число.

Выделим действительную и мнимую части:

$$w = az^2 = a(x+iy)^2 = a(x^2 - y^2) + i2axy,$$

откуда

$$\operatorname{Re} w = a(x^2 - y^2), \quad \operatorname{Im} w = 2axy.$$

Согласно (1.10),

$$\Phi = \operatorname{Im} w = 2axy, \quad A = \operatorname{Re} w = a(x^2 - y^2).$$

Уравнения

$$xy = const \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = const$$

определяют два взаимно ортогональных семейства гипербол (рис.6). Причем первое из этих семейств – это эквипотенциальные линии., а второе – представляет собой силовые линии.

Вычислим компоненты напряженности поля:

$$E_x = -2ay, \quad E_y = -2ax, \quad \left|\vec{E}\right| = 2|a|\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Как видно, компоненты напряженности пропорциональны расстоянию от осей координат. Если переписать последнее выражение в виде $\left|\vec{E}\right| = 2|a|\rho$, то легко понять, *что напряженность электрического поля внутри прямого двугранного проводящего угла растет прямо пропорционально расстоянию от ребра двугранного угла.*

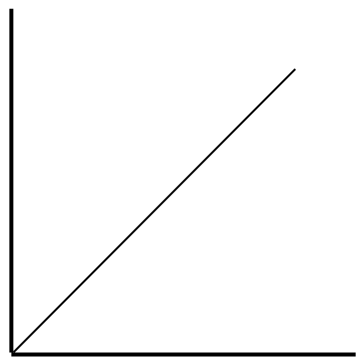

Рис. 6.

Отметим, что постоянная a связана с плотностью заряда. Действительно, на поверхности проводника, в частности при $x = 0$, отлична от нуля только компонента $E_x = -2ay$. Воспользовавшись (1.16), получим $E_x = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, откуда $\sigma = -2\varepsilon_0 ay$. Аналогично, на поверхности $y = 0$ плотность заряда $\sigma = -2\varepsilon_0 ax$. Как видим, плотность заряда пропорциональна расстоянию до начала координат, иначе говоря, *на внутренней поверхности двугранного угла плотность заряда возрастает по мере удаления от ребра угла.*

Здесь нам хотелось бы сделать два важных замечания, имеющих прямое отношение ко всем задачам, решаемым методом конформных отображений.

Замечание 1. Комплексный потенциал (2.1) позволяет определить не только поле внутри прямого двугранного угла. Он позволяет найти поле между проводящими гранями прямого двугранного угла и проводящей поверхностью (гиперболическим цилиндром), удовлетворяющей уравнению

$xy = const$. И это еще не все. Он же позволяет найти поле между двумя проводящими поверхностями (двумя гиперболическими цилиндрами), удовлетворяющими уравнениям $xy = C_1$ и $xy = C_2$, где C_1 и C_2 - постоянные одного знака.

Замечание 2. Согласно формулам (1.10) и (1.11) функции $\mathrm{Re}\,w$ и $\mathrm{Im}\,w$ взаимозаменяемы. Действительно, если в результате решения какой-либо задачи использовано отображение $w = u + iv$, то полагая, что получен комплексный потенциал вида $w_1 = A + i\Phi$, мы получим решение одной задачи ($\Phi = \mathrm{Im}\,w = v$). Если же полагать, что $w = w_2 = \Phi - iA$, то мы получим решение другой задачи ($\Phi = \mathrm{Re}\,w = u$). Следовательно, подобная замена позволяет по решению какой-либо задачи находить решение новой задачи.

Рассмотренная задача допускает обобщение. Предположим, что проводящие плоскости пересекаются под произвольным углом α, удовлетворяющим условию $\alpha < \pi$ (см. рис. 7). Очевидно, что сектор $0 < \arg z < \alpha$ функцией

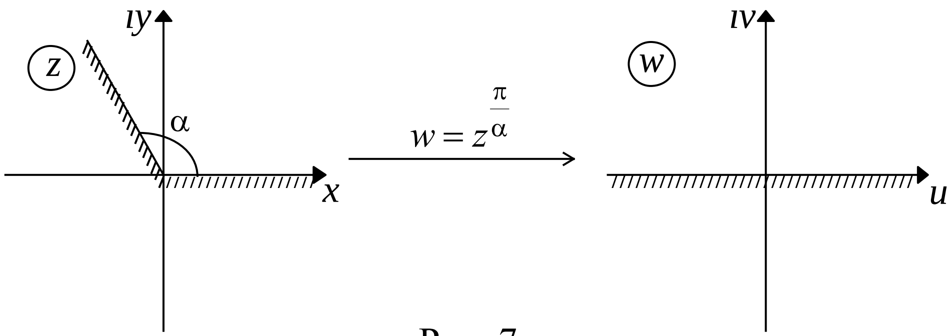

Рис. 7.

$w = z^{\pi/\alpha}$ конформно отображается на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,w > 0$. Поэтому функция

$$w = az^{\pi/\alpha}, \tag{2.2}$$

где a – действительное или мнимое число, является комплексным потенциалом для рассматриваемого сектора. Согласно (1.15) внутри угла величина напряженности

$$\left|\vec{E}\right| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{\pi}{\alpha}\left|az^{\frac{\pi}{\alpha}-1}\right| = |a|\frac{\pi}{\alpha}\rho^{\frac{\pi}{\alpha}-1}.$$

Так как $\frac{\pi}{\alpha} - 1 > 0$, *то напряженность поля растет с ростом* ρ*, т. е. с ростом расстояния от ребра двугранного угла.* Плотность заряда, распределенного на гранях, так же растет по мере удаления от ребра.

В качестве самостоятельного упражнения предлагаем разобрать случай пересечения проводящих плоскостей под углом $\alpha = \pi/4$. Требуется найти комплексный потенциал *w*, скалярный потенциал Φ, уравнения силовых и эквипотенциальных линий, а также распределение заряда на внутренней поверхности двугранного угла.

Подчеркнем еще раз, что комплексный потенциал (2.2) позволяет полностью решить плоскую электростатическую задачу для области между плоскими проводящими поверхностями, пересекающимися под углом $\alpha < \pi$ (а учитывая задачу из примера 1 и под углом $\alpha = \pi$). Для полноты картины теперь полезно рассмотреть поле снаружи двугранного угла, образованного проводящими плоскостями.

Пример 4. Найдем поле снаружи прямого двугранного угла, образованного проводящими полуплоскостями. (В реальных условиях это может быть поле вблизи клиновидного края на проводнике).

Решение. Пусть ось O*z* совпадает с ребром угла, а оси O*x* и O*y* проходят по граням, как показано на рис. 8. Нам нужно найти поле в секторе $0 < \arg z < 3\pi/2$. Для этого следует построить такую функцию *f(z)*, которая переводит его границы (эквипотенциальные линии) в прямую, параллельную либо действительной оси, либо мнимой оси. Легко видеть, что соответствующее преобразование осуществляет функция

$$w = az^{2/3},$$

где a – действительное или мнимое число. В полярных координатах для дей-

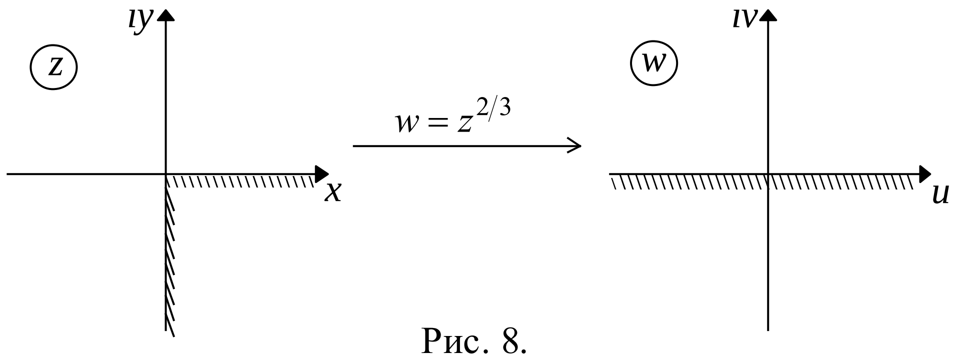

Рис. 8.

ствительного a получим

$$\operatorname{Re} w = a\rho^{\frac{2}{3}} \cdot \cos\frac{2}{3}\varphi, \quad \operatorname{Im} w = a\rho^{\frac{2}{3}} \cdot \sin\frac{2}{3}\varphi.$$

Мнимая часть принимает постоянное (равное нулю) значение на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = 3\pi/2$. Поэтому в секторе $0 \le \varphi \le 3\pi/2$

поле описывается скалярным потенциалом

$$\Phi = a\rho^{\frac{2}{3}} \cdot \sin\frac{2}{3}\varphi.$$

Уравнения

$$a\rho^{\frac{2}{3}} \cdot \cos\frac{2}{3}\varphi = const \quad \text{и} \quad a\rho^{\frac{2}{3}} \cdot \sin\frac{2}{3}\varphi = const$$

определяют два семейства ортогональных кривых – силовых и эквипотенциальных линий, соответственно (см. рис. 9).

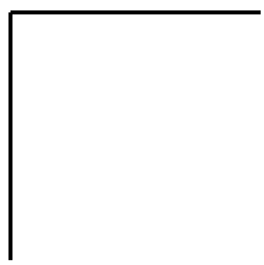

Рис. 9.

Для нахождения напряженности поля воспользуемся (1.13). Получим

$$-E_y - iE_x = \frac{dw}{dz} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt[3]{z}}. \tag{2.3}$$

Найдем поле на поверхности проводника. На луче $\varphi = 0$ $z = x$. Поэтому мнимая часть выражения (2.3) равна нулю, т. е.

$$E_x\Big|_{\varphi=0} = 0, \quad E_y\Big|_{\varphi=0} = -\frac{2a}{3\sqrt[3]{x}},$$

откуда получаем выражение для поверхностной плотности заряда:

$$\sigma = -\frac{2a}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Как видим, *плотность заряда возрастает при приближении к ребру угла, стремясь вблизи ребра к бесконечности.* Точно так же распределен заряд и на другой поверхности.

Подобная зависимость от расстояния до ребра угла характерна и для напряженности поля. Из (2.3) легко получить

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{2}{3} \cdot \frac{|a|}{\sqrt[3]{\rho}}.$$

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть проводящие полуплоскости образуют двугранный угол $\alpha < \pi$ (рис. 10). Тогда вне соответствующего плоского угла будет находится сектор $0 < \arg z < 2\pi - \alpha$. Очевидно, что существует степенная функция $w = z^p$, которая отображает этот сектор на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а луч $\arg z = 2\pi - \alpha$ преобразует в луч $\arg w = \pi$. Другими словами должно выполняться условие $(2\pi - \alpha)p = \pi$, откуда следует

$$p = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}. \qquad (2.4)$$

Отметим, что в силу условия $\alpha < \pi$ показатель степени $p < 1$.

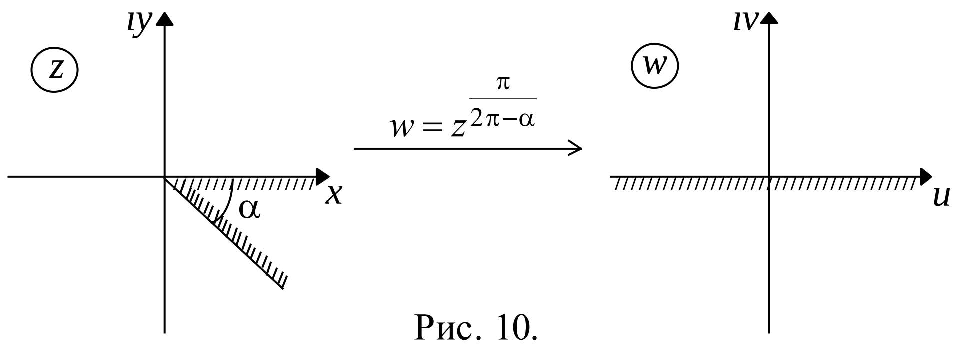

Рис. 10.

Таким образом, комплексный потенциал имеет вид:

$$w = az^p. \qquad (2.5)$$

Перейдя к полярным координатам и разделяя действительную и мнимую части получим

$$w = a\rho^p(\cos p\varphi + i \cdot \sin p\varphi),$$

откуда легко получить уравнения силовых и эквипотенциальных линий.

Скалярный потенциал поля

$$\Phi = a\rho^p \cdot \sin p\varphi .$$

Модуль напряженности электрического поля

$$\left|\vec{E}\right| = p\left|az^{p-1}\right| = \frac{|a|p}{\rho^{1-p}} .$$

Так как $1 - p > 0$, то напряженность поля падает с ростом ρ, т.е. по мере удаления от ребра угла. По мере же приближения к ребру $\rho \to 0$ и напряженность поля неограниченно возрастает.

Заметим, что для определения значения постоянного множителя a необходимо знать или напряженность поля в какой-либо точке пространства, или плотность заряда в какой-либо точке поверхности проводника (кроме точек $\rho = 0$ и $\rho = \infty$). В том частном случае, если в какой-нибудь точке $E = 0$, получим $a = 0$.

Для отыскания закона распределения заряда по поверхности проводника продифференцируем комплексный потенциал в направлении, перпендикулярном полярному радиусу. Получим

$$E_n = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{ap}{\rho^{1-p}} \cdot \cos p\varphi .$$

На луче $\varphi = 0$ получим $E_n = -\dfrac{ap}{\rho^{1-p}}$. На луче $\varphi = 2\pi - \alpha$ получим $E_n = \dfrac{ap}{\rho^{1-p}}$.

Так как поверхностная плотность заряда $\sigma = E_n / \varepsilon_0$, то из полученных формул видно, что плотность убывает по мере удаления от ребра двугранного угла.

В качестве упражнения предлагаем найти поле у края тонкой проводящей пластины. Подскажем, что решение этой задачи можно найти, используя комплексный потенциал (2.4) с $\alpha = 0$. Найдите выражения для скалярного потенциала и напряженности поля, распределение заряда по поверхности, уравнения силовых и эквипотенциальных линий. (Последние представляют собой два взаимно ортогональных семейства софокусных парабол $\rho(1 \pm \cos\varphi) = C^2$).

В заключение решим задачу, которой посвящен целый параграф в самом, пожалуй, полном и серьезном учебнике по физике /4/. Прежде чем решать задачу, обсудим некоторые свойства функции $\ln z$.

Для разделения действительной и мнимой частей функции $\ln z$ используем полярные координаты и показательную форму комплексного числа: $z = \rho e^{i\varphi}$. Тогда

$$\ln z = \ln\left(\rho e^{i\varphi}\right) = \ln\rho + \ln e^{i\varphi} = \ln\rho + i\varphi .$$

Как видим,

$$\mathrm{Re}(\ln z) = \ln\rho, \quad \mathrm{Im}(\ln z) = \varphi . \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что функция $w = \ln z$ переводит луч $\varphi = \alpha$, $0 < \rho < \infty$ в

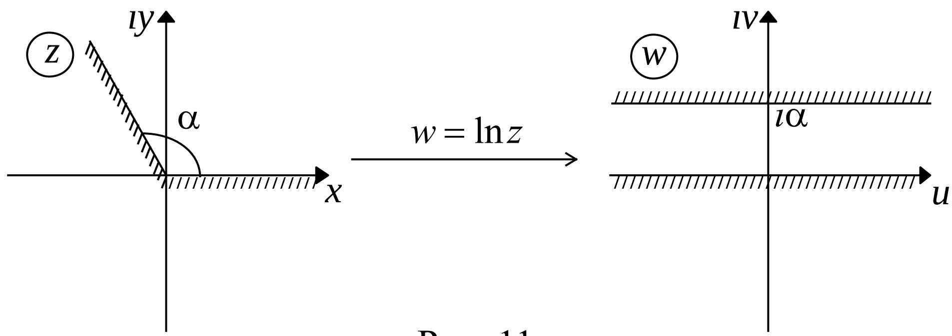

Рис. 11.

прямую $\mathrm{Im}\, w = \alpha$, $-\infty < \mathrm{Re}\, w < \infty$, т. е. в прямую, перпендикулярную мнимой оси на плоскости *w*. Соответственно, сектор $0 < \varphi < \alpha$ функция $w = \ln z$ отображает на полосу $0 < \mathrm{Im}\, w < \alpha$ (рис. 11). Теперь обратимся к электростатике.

Как известно, работой выхода называется та работа, которую надо произвести над зарядом для того, чтобы удалить его из проводника. У разных проводников работа выхода принимает различные значения. Но это не значит, что она зависит только от рода проводника. Работа выхода зависит от температуры, от состояния поверхности и даже, если проводник – монокристалл, может быть различной на разных его гранях.

Если два различных проводника привести в соприкосновение, то между ними происходит обмен свободными носителями (чаще, электронами). В результате проводники заряжаются, причем проводник с меньшей работой выхода заряжается положительно (он теряет больше электронов), а с большей – отрицательно. Процесс происходит до тех пор, пока потоки электронов в обоих направлениях не уравновесятся. При этом между проводниками установится разность потенциалов, препятствующая изменению зарядов на проводниках. Эта разность называется *контактной разностью потенциалов*. Она равна разности работ выхода проводников, отнесенной к заряду электрона.

Рассмотрим поперечный разрез двух различных соприкасающихся на отрезке *OC* (рис. 12) проводников. Вблизи места контакта (вблизи точки *O*) стороны проводников *OA* и *OB* можно рассматривать как плоские. Наличие разности потенциалов *U* между проводниками приводит к появлению в пространстве между ними электрического поля. Найдем это поле /5/.

Примем потенциал стороны *OA* равным нулю. Совместим полюс полярной системы координат с точкой *O*, а полярную ось - с прямой *OA* (рис. 13). Обозначим угол между лучами *OA* и *OB* через α. Так как на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ потенциал принимает постоянные значения 0 и *U*, соответственно, то функция $w = a \ln z$ осуществляет нужное нам конформное отображение (см. рис. 11).

Скалярный потенциал $\Phi = \operatorname{Im} w = a\varphi$. Постоянную *a* найдем из условия $\Phi(\alpha) = U$, откуда $a\alpha = U$ и $a = U/\alpha$. Таким образом,

$$\Phi = \frac{U}{\alpha} \cdot \varphi .$$

Эквипотенциальными линиями являются лучи: $\varphi = const$. Силовые линии представляют собой дуги окружностей с центром в точке O: $\rho = const$ при $0 \le \varphi \le \alpha$ (рис. 14). Напряженность поля

$$E = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{U}{\alpha} \cdot \frac{1}{\rho},$$

т. е. напряженность падает с ростом расстояния от точки O.

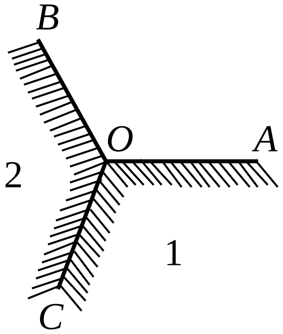

Рис. 12.

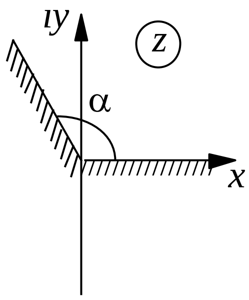

Рис. 13.

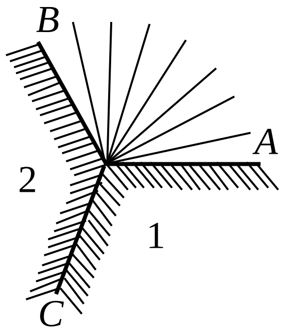

Рис. 14.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.. Наука, 1982.

2. *Радыгин В. М., Голубева О. В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М., В. Ш., 1983.

3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. М., В. Ш., 1973.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Наука, 1982.

5. *Цурикова Л. М., Цуриков В. И.* О решении одной задачи на тему «Контактная разность потенциалов» // Физическое образование в вузах, 2015, т. 21, № 1, с. 62-67.