МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
ФГБОУ ВО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации
по организации самостоятельной работы
и выполнению контрольной работы
для студентов 1 курса
направления подготовки 38.03.01 «Экономика»
заочной формы обучения

2-е издание, исправленное

КАРАВАЕВО
Костромская ГСХА
2015

УДК 512(076)
ББК 22.1
М 34

Составители: сотрудники кафедры высшей математики Костромской ГСХА зав. кафедрой *Л.Б. Рыбина* и доцент *Н.М. Воробьёва.*

Рецензент: доцент кафедры высшей математики Костромской ГСХА *И.А. Батманова.*

Рекомендовано к изданию методической комиссией экономического факультета, протокол № 4 от 14 октября 2015 г.

М 34 **Математический анализ** : методические рекомендации по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, Н.М. Воробьёва. — 2-е изд., испр. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 46 с.

Издание содержит программу дисциплины «Математический анализ», методические указания к организации самостоятельной работы студентов, рекомендуемую литературу, вопросы для самопроверки, контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины, общие требования к выполнению контрольной работы, а также задания и примеры выполнения заданий.

Методические рекомендации предназначены для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения.

УДК 512(076)
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы предназначены для студентов 1 курса, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 080100.62 «Экономика» заочной формы обучения.

Издание содержит программу дисциплины, общие требования по выполнению контрольной работы, задания для контрольной работы, примеры выполнения заданий, вопросы для самопроверки рекомендуемую литературу.

Целями освоения дисциплины «Математический анализ» являются:

– формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;
– обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования экономических процессов и явлений, при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений.

В результате изучения базовой части цикла дисциплины «Математический анализ» обучающийся должен:

– *знать* основы математического анализа, необходимые для решения экономических задач;
– *уметь* применять методы математического анализа для решения экономических задач;
– *владеть* навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач.

1. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1.1. Введение в математический анализ

Понятие функции. Основные свойства функций. Сложная функция, обратная функция, неявная функция. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Элементарные функции. Классификация функций. Применение функций в экономике. Предел числовой последовательности. Предел функции в точке и бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация.

1.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной функции. Геометрический, физический и экономический смыслы производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Производные неявной и параметрически заданной функций. Понятие производных высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Приложение производной к исследованию функции. Признаки возрастания и убывания, точек экстремума. Выпуклость и вогнутость графиков функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной в задачах с экономическим содержанием.

1.3. Функции нескольких переменных

Функции нескольких независимых переменных (основные понятия). Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные 1-го и 2-го порядков. Дифференциал функции двух переменных. Производная по направлению. Градиент. Экстремум функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Условный экстремум. Понятие об эмпирических формулах. Метод наименьших квадратов. Функции нескольких переменных в экономических задачах.

1.4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Понятие первообразной. Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: метод замены переменной, метод интегрирования по частям. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых тригонометрических функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Понятие определенного интеграла. Задача о площади криволинейной трапеции, приводящая к понятию определенного интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур и объемов тел вращения. Несобственные интегралы. Применение понятия определенного интеграла в экономике.

1.5. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Применение дифференциальных уравнений в экономике.

1.6. Ряды

Числовые ряды (основные понятия). Сходимость ряда. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Изучение дисциплины «Математический анализ» начинается на установочной сессии, где студенты слушают обзорные лекции, знакомятся с решением задач и получают рекомендации по самостоятельной работе.

После установочной сессии студенты приступают к самостоятельному изучению материала по указанной преподавателем литературе и выполняют контрольную работу «Математический анализ».

Следует помнить, что самостоятельная работа является основной формой обучения студента-заочника. Вначале рекомендуем изучить теоретический материал по источникам, приведенным в данном издании (можно использовать и другую литературу). При чтении учебника необходимо внимательно разобрать рассматриваемые примеры решения задач. Затем самостоятельно решите указанные в данном пособии задачи и ответьте на вопросы для самоконтроля знаний. Далее решите задачи контрольной работы. В данном пособии приведены примеры решения заданий контрольной работы.

Если в процессе работы у студента возникают вопросы по изучаемому материалу, то он может обратиться за консультацией к преподавателю кафедры высшей математики (ауд. 211, 212, 214). Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольной работы.

Завершающим этапом изучения дисциплины является сдача экзамена. В данном пособии приведены контрольные вопросы для проведения аттестации по итогам освоения дисциплины «Математический анализ».

2.1. Введение в математический анализ

Литература: [1, главы VI-VIII].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава VI, упражнения 2, 3, 7, 9, 10; глава VII, упражнения 4, 7, 16, 17; глава VIII, упражнения 3, 5].

2) [4, № 676-680; 734-737, 753-757, 763-767, 782, 783, 814-816].

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется функцией?
2. Что называется областью определения функции? областью значений?
3. Какие есть способы задания функций?
4. Какая функция называется четной (нечетной)? Приведите примеры четных (нечетных) функций. Какова особенность графика четной (нечетной) функции?
5. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на промежутке? Приведите примеры возрастающих (убывающих) функций на некотором промежутке.
6. Какая функция называется ограниченной на промежутке? Приведите пример ограниченной на некотором промежутке функции.
7. Какая функция называется периодической? Что называют основным периодом функции? Приведите примеры периодических функций. Какова особенность графика периодической функции?
8. Какие функции относятся к основным элементарным?
9. Степенная функция, ее свойства и график.
10. Показательная функция, ее свойства и график.
11. Логарифмическая функция, ее свойства и график.
12. Тригонометрические функции, их свойства и графики.
13. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.
14. Какая функция называется явной (неявной)?
15. Что представляет из себя параметрическое задание функции?
16. Какая функция называется обратной к данной? Приведите примеры взаимно-обратных функций. Какова особенность графиков взаимно-обратных функций?
17. Какая функция называется сложной? Приведите примеры сложных функций.
18. Какие функции называются элементарными? неэлементарными? Приведите примеры.
19. Приведите примеры функций, наиболее часто используемых в экономике.
20. Что называется числовой последовательностью?
21. Что называется пределом числовой последовательности?
22. Что называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности?
23. Что называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0?
24. Какая функция называется бесконечно малой величиной при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$? Приведите примеры бесконечно малых величин.

25. Какова связь между пределом функции и бесконечно малой величиной?

26. Какими свойствами обладают бесконечно малые величины?

27. Какая функция называется бесконечно большой величиной при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$? Приведите примеры бесконечно больших величин.

28. Какими свойствами обладают бесконечно большие величины?

29. Какова связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами?

30. Сформулируйте основные теоремы о пределах.

31. Сформулируйте признаки существования предела.

32. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов?

33. Как раскрывается неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$?

34. Как раскрывается неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$?

35. Как раскрывается неопределенность вида $(\infty - \infty)$?

36. Какой предел называется первым замечательным пределом?

37. Какой предел называется вторым замечательным пределом?

38. Какие условия должны выполниться, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывной в точке x_0? Сформулируйте два определения непрерывности функции в точке.

39. Какая функция называется непрерывной в интервале (a, b)?

40. Какие точки называются точками разрыва функции?

41. Как классифицируются точки разрыва?

42. Сформулируйте основные теоремы о непрерывных функциях.

43. Какими свойствами обладают функции, непрерывные на отрезке?

2.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Литература: [1, главы IX-XII].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава X, упражнения 1-33, 35-40, 45, 46; глава XI, упражнения 3-7, 18-22, 27-33; глава XII, упражнения 1-6, 9].

2) [4, № 867-870, 874-888, 907, 909, 963, 985, 991, 1021, 1044, 1047, 1075, 1077, 1091, 1162, 1163, 1201, 1212, 1247 (1, 3), 1257].

Вопросы для самоконтроля

1. Задача о скорости прямолинейного неравномерного движения.
2. Задача о касательной.
3. Какой вид имеет уравнение касательной к плоской кривой?
4. Что называется производной функции $y = f(x)$?
5. Каков геометрический смысл производной?
6. Каков физический смысл производной?
7. Какова зависимость между непрерывностью функции и ее дифференцируемостью?
8. Сформулируйте основные правила дифференцирования функции. Выведите одно из них, пользуясь определением производной.
9. Как находится производная сложной функции?
10. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
11. Выведите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
12. Как найти производную функции, заданной неявно?
13. Как найти производную функции, заданной параметрически?
14. Что называется производной второго (третьего, n-го порядка)? Каков механический смысл второй производной?
15. В виде суммы каких двух слагаемых можно представить приращение функции Δy? Какое из этих слагаемых называется главной частью приращения функции?
16. Что называют дифференциалом функции? По какой формуле он находится?
17. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
18. Как с помощью дифференциала находится приближенное значение функции?
19. Что называют дифференциалом второго порядка? По какой формуле он находится?
20. В каких задачах экономики используется понятие производной?
21. Сформулируйте теорему Ферма. Каков ее геометрический смысл?
22. Сформулируйте теорему Ролля. Каков ее геометрический смысл?
23. Сформулируйте теорему Коши. Каков ее геометрический смысл?
24. Сформулируйте теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?
25. Какие условия являются необходимыми условиями возрастания (убывания) функции?
26. Какие условия являются достаточными условиями возрастания (убывания) функции?

27. Что называется точкой максимума (минимума) функции?

28. Что называется максимумом (минимумом) функции?

29. Какие условия являются необходимыми условиями экстремума функции?

30. Какие условия являются достаточными условиями экстремума функции?

31. Каков план исследования функции на экстремум?

32. Сформулируйте достаточный признак существования экстремума функции, основанный на знаке второй производной.

33. Какой график функции называется выпуклым (вогнутым) на интервале (a, b)?

34. Какую точку графика функции называют точкой перегиба?

35. Какие условия являются достаточными условиями выпуклости (вогнутости) графика функции?

36. Какие условия являются достаточными условиями существования точки перегиба?

37. Каков план исследования функции на выпуклость, вогнутость, точки перегиба?

38. Что называют асимптотой графика функции $y = f(x)$?

39. Какие есть виды асимптот?

40. Как найти вертикальные асимптоты кривой?

41. Какой вид имеет уравнение наклонной асимптоты? По каким формулам находятся параметры, входящие в это уравнение?

42. Как найти горизонтальные асимптоты кривой?

43. Каков план нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке?

44. Сформулируйте правило Лопиталя.

2.3. Функции нескольких переменных

Литература: [1, глава XX].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава XX, упражнения 1, 4, 7, 8, 14].

2) [4, № 1858-1863, 1871, 1884, 2030-2033].

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется функцией нескольких переменных?

2. Что называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ (или в точке (x_0, y_0)).

3. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0)?

4. Что называется частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по переменной x?

5. Что называется частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ по переменной y?

6. Каков геометрический смысл частных производных функции двух переменных?

7. Дайте понятие частных производных второго порядка функции двух переменных.

8. По какой формуле находится полный дифференциал первого порядка функции двух переменных?

9. Что называется точкой максимума (минимума) функции двух переменных?

10. Что называется максимумом (минимумом) функции двух переменных?

11. Каковы необходимые условия экстремума функции двух переменных?

12. Какие точки называются критическими точками?

13. Каковы достаточные условия экстремума функции двух переменных?

14. Что называется производной z'_l по направлению l функции $z = f(x, y)$?

15. Что называется градиентом функции $z = f(x, y)$?

16. Как находятся наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области?

17. Что называется точкой условного максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$? Какие есть методы нахождения условного экстремума?

18. Сформулируйте понятие эмпирической формулы. В чем заключается метод наименьших квадратов?

19. Где в экономической теории применяются функции нескольких переменных?

2.4. Интегральное исчисление функций одной переменной

Литература: [1, главы XIII-XV (§ 1, 6)].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава XIII, упражнения 1-5, 7-9, 23, 24, 27-31, 33-35, 48-51, 58, 60; глава XIV, упражнения 1-4, 7, 10; глава XV, упражнения 1 (1-3, 5, 8, 9), 10-12 (1, 2, 4), 13].

2) [4, № 1279-1316, 1360-1364, 1371, 1383, 1386-1392, 1401, 1402, 1420-1422, 1424, 1426, 1432, 1458-1460, 1593-1601, 1616, 1622, 1625, 1635, 1636, 1671, 1686, 1748 (1-3), 1749 (3), 1751].

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют первообразной функции?
2. Что называют неопределенным интегралом?
3. Каковы основные свойства неопределенного интеграла?
4. Напишите основные формулы интегрирования.
5. В чем заключается метод подведения под знак дифференциала при нахождении неопределенных интегралов?
6. В чем заключается метод замены переменной при нахождении неопределенных интегралов?
7. Какой вид имеет формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле?
8. Укажите некоторые типы интегралов, которые удобно находить по формуле интегрирования по частям?
9. Как находят интегралы от простейших дробей I, II, III типов?
10. Как находят неопределенный интеграл от рациональной дроби, не являющейся простейшей?
11. Какая подстановка называется универсальной и для какого типа интегралов она применяется?
12. Как находят интегралы типа $\int \sin^m x \cos^n x dx$?
13. Как находят интегралы типа $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$?
14. Как находят интегралы типа $\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^\alpha}, \ldots, \sqrt[m]{(ax+b)^\beta}\right)dx$?
15. Какая фигура называется криволинейной трапецией?
16. В чем состоит задача о площади криволинейной трапеции? Каков способ ее решения?
17. Что называют определенным интегралом?
18. Каковы основные свойства определенного интеграла?
19. Сформулируйте теорему о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу.
20. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
21. В чем заключается метод замены переменной при вычислении определенных интегралов?
22. Какой вид имеет формула интегрирования по частям в определенном интеграле?
23. По какой формуле находится площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$?
24. По какой формуле находится площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \leq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$?

25. По какой формуле находится площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$)?

26. По какой формуле находится объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$?

27. По какой формуле находится объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = g(y) \geq 0$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$?

28. Какие интегралы называются несобственными?

29. Как вычисляются несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования?

30. Как вычисляются несобственные интегралы от неограниченных функций?

31. В каком случае несобственный интеграл называется расходящимся (сходящимся)?

32. Где в экономической теории применяется понятие определенного интеграла?

2.5. Дифференциальные уравнения

Литература: [1, глава XXII, § 1-5, 7, 9, 11-13].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава XXII, упражнения 3-8, 14-16, 19-27].

2) [4, № 2057-2061, 2065-2067, 2093, 2094, 2096, 2097, 2099, 2163-2165, 2184-2189, 2213-2215].

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите примеры задач, решение которых приводит к дифференциальным уравнениям.
2. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка?
3. Что называют начальным условием?
4. Что называют общим решением дифференциального уравнения первого порядка? Каков его геометрический смысл?
5. Что называют частным решением дифференциального уравнения первого порядка? Каков его геометрический смысл?
6. Какая задача называется задачей Коши?
7. Какой вид имеют дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными? Каков способ их решения?
8. Какой вид имеют однородные дифференциальные уравнения первого порядка? Каков способ их решения?

9. Какой вид имеют линейные дифференциальные уравнения первого порядка? Каков способ их решения?

10. Какие есть типы дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка? Каковы способы их решения?

11. Каков вид линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ)? Как составляется характеристическое уравнение?

12. Какой вид имеет общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в зависимости от корней его характеристического уравнения?

13. Какой вид имеют линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ)?

14. Какова структура общего решения ЛНДУ?

15. Как находится частное решение ЛНДУ, если его правая часть имеет вид многочлена степени n, т.е. $f(x) = P_n(x)$?

16. Как находится частное решение ЛНДУ, если его правая часть имеет вид $f(x) = P_n(x)e^{mx}$, где $m \in R$?

17. Как находится частное решение ЛНДУ, если его правая часть имеет вид $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$?

18. Где в экономической теории применяются дифференциальные уравнения?

2.6. Ряды

Литература: [1, глава XXI, § 1-14].

Задачи для самостоятельного решения:

1) [1, глава XXI, упражнения 1-19, 21, 24-29].

2) [4, № 2422-2428, 2432-2435, 2438, 2439, 2444, 2445, 2470-2473, 2492, 2531, 2533].

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют числовым рядом?
2. Что называют суммой числового ряда?
3. Какой числовой ряд называется сходящимся? расходящимся?
4. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда. Сформулируйте достаточный признак расходимости ряда.
5. Сформулируйте признак Даламбера.
6. Сформулируйте интегральный признак Коши.
7. Сформулируйте радикальный признак Коши исследования числовых рядов с положительными членами на сходимость.

8. Какой ряд называется геометрическим? В каком случае он является сходящимся?

9. Какой ряд называется обобщенным гармоническим рядом? В каком случае он является сходящимся?

10. Сформулируйте признаки сравнения рядов.

11. Какой ряд называется знакочередующимся?

12. Сформулируйте признак Лейбница.

13. Что называют степенным рядом?

14. Сформулируйте теорему Абеля.

15. Как находится радиус, интервал и область сходимости степенного ряда?

16. Какой вид имеет формула разложения в степенной ряд функции $f(x)$ по степеням x? Как называется этот ряд?

17. Какой вид имеет формула разложения в степенной ряд функции $f(x)$ по степеням $x-a$? Как называется этот ряд?

18. Составьте таблицу разложений в степенные ряды функций:
$y=\dfrac{1}{1-x}$, $y=\ln(1+x)$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\mathrm{e}^x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=(1+x)^m$.

19. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение функции?

20. Как с помощью рядов можно вычислить приближенное значение определенного интеграла?

3. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Контрольная работа должна выполняться студентом самостоятельно и по своему варианту. Номер варианта определяется по последней цифре шифра студента в зачетной книжке. При этом, если предпоследняя цифра шифра есть нечетное число (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для своего варианта следует взять из таблицы 1, если же четное число (0, 2, 4, 6, 8), то из таблицы 2.

Таблица 1

Номера задач для контрольной работы

Номер варианта	Контрольная работа № 1							
1	1	21	41	61	81	101	121	141
2	2	22	42	62	82	102	122	142
3	3	23	43	63	83	103	123	143
4	4	24	44	64	84	104	124	144
5	5	25	45	65	85	105	125	145
6	6	26	46	66	86	106	126	146
7	7	27	47	67	87	107	127	147
8	8	28	48	68	88	108	128	148
9	9	29	49	69	89	109	129	149
0	10	30	50	70	90	110	130	150

Таблица 2

Номера задач для контрольной работы

Номер варианта	Контрольная работа № 1							
1	11	31	51	71	91	111	131	151
2	12	32	52	72	92	112	132	152
3	13	33	53	73	93	113	133	153
4	14	34	54	74	94	114	134	154
5	15	35	55	75	95	115	135	155
6	16	36	56	76	96	116	136	156
7	17	37	57	77	97	117	137	157
8	18	38	58	78	98	118	138	158
9	19	39	59	79	99	119	139	159
0	20	40	60	80	100	120	140	160

Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку, на внешней обложке которой должны быть указаны: факультет, курс, группа, дисциплина, направление подготовки, номер контрольной работы, фамилия, имя, отчество студента, шифр.

Задачи в работе следует располагать по порядку, полностью переписывая условие. Решение задач следует излагать подробно.

На каждой странице тетради необходимо оставить поля шириной 3-5 см для замечаний рецензента.

Выполненная контрольная работа сдается в деканат факультета заочного обучения, откуда она поступает на кафедру высшей математики.

Допущенные к защите контрольные работы хранятся на кафедре высшей математики и выдаются студенту при собеседовании.

Незачтенные контрольные работы возвращаются студенту для исправления ошибок. Все исправления ошибок делаются в конце контрольной работы. Исправления в тексте прорецензированной работы не допускаются. Контрольную работу с выполненными исправлениями следует отдать преподавателю для повторного рецензирования. После прохождения собеседования студент допускается к сдаче экзамена.

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1

В *задачах 1-20* найти указанные пределы, не используя правило Лопиталя (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Пределы	Номер задачи	Пределы
1	2	3	4
1	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$	2	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5+x^2-3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2(x-4)}{3-\sqrt{1+2x}}$
3	а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-8}{3x^2-2x-8}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$	4	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x^2+2}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+\sqrt[3]{x}}$
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{2-4x+5x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$	6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3}{2-3x^2+3x^4}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$
7	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+3x-5}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2x}{x+3}$	8	а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+10x+8}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$
9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{1-2x^2+3x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$	10	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x+1}{4x^2-5x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$
11	а) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{8+2-x^2}{x^2-16}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$	12	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-7x-2}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$
13	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+4}{4x^3+x^2-1}$ б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$	14	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-3x^2}{2x^2+x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6-x}-2}{2-x}$

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
15	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2+x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{3x+\sqrt[3]{x}}$	16	а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-x-14}{x^3+8}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$
17	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-3x-2x^2}{4x^3-5x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$	18	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x+2\sqrt{x}}$ б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$
19	а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+4}-2x}{x}$	20	а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-9}$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sqrt{x}}{9x}$

Задание 2

В *задачах 21-40* найти производные функций (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Функции	Номер задачи	Функции
1	2	3	4
21	а) $y=x^2\operatorname{tg}x+\ln\cos x+e^{5x}$ б) $y=e^{x-\arcsin 2x}$	22	а) $y=\ln\dfrac{x^2}{x+1}+3x\sqrt[3]{x}$ б) $y=2^{\operatorname{arctg}3x-x^2}$
23	а) $y=x^2+x\arcsin 2x+\sqrt{1-4x^2}$ б) $y=2^{\arcsin\frac{1}{x}}$	24	а) $y=\ln\dfrac{(x-1)^2}{x+2}+3\sqrt[3]{x^2}$ б) $y=2^{\frac{4}{\sin x}}$
25	а) $y=\ln\dfrac{x^2}{x-1}+4x\sqrt[4]{x}$ б) $y=\left(e^{\sin 3x}+3x\right)^5$	26	а) $y=x^3(3\ln x-1)-\dfrac{x+1}{e^{3x}}$ б) $y=\left(5^{\operatorname{tg}2x}+3\right)^4$
27	а) $y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x+3}+3x\sqrt[3]{x}$ б) $y=5^{\arccos x}$	28	а) $y=e^{5x}(5x-1)-\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$ б) $y=4^{\operatorname{arctg}\frac{3}{x}}$
29	а) $y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x-2}+4x\sqrt[4]{x^3}$ б) $y=2^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$	30	а) $y=x(\ln x-1)+e^{3x}(3x-1)$ б) $y=3^{\cos^2 4x}$

1	2	3	4
31	а) $y = x \cdot \arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ б) $y = e^{x\sin^2 3x}$	32	а) $y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ б) $y = e^{\sqrt[3]{x+1}}$
33	а) $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1})$ б) $y = x^2 \cdot 10^{\sqrt{x+1}}$	34	а) $y = -ctg^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln\sin\frac{x}{2}$ б) $y = 2^{x \cdot tg 3x}$
35	а) $y = x^2 \cdot \arccos\sqrt{2x + 3}$ б) $y = e^{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	36	а) $y = \left(\cos 3x - \frac{1}{4x}\right)^5$ б) $y = e^{x^2} \cdot \ln 5x$
37	а) $y = \frac{1 + x^2}{2\sqrt{1 + 2x^2}}$ б) $y = e^{1-\sin^2 x 3x}$	38	а) $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$ б) $y = 2^{\sqrt{\arcsin 3x}}$
39	а) $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$ б) $y = e^{\cos^3 2x}$	40	а) $y = \mathrm{arctg}(x + 1) + \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2}$ б) $y = \sin\left(2^{\sqrt{x}}\right)$

Задание 3

В *задачах 41-60* исследовать данную функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график (табл. 3).

Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность, выделить точки разрыва;
3) исследовать функцию на чётность, нечётность;
4) найти интервалы возрастания, убывания функции, точки экстремума и экстремумы функции;
5) найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции;
6) найти асимптоты (вертикальные, наклонные, горизонтальные);
7) по результатам исследования построить график функции.

Таблица 3

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Функция	Номер задачи	Функция
41	$y=\dfrac{x^2+1}{x}$	42	$y=\dfrac{x^2+9}{x}$
43	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$	44	$y=\dfrac{x^2+8}{x+1}$
45	$y=\dfrac{x^2-3}{x+2}$	46	$y=\dfrac{x^2+21}{x-2}$
47	$y=\dfrac{x^2-8}{x-3}$	48	$y=\dfrac{x^2+16}{x+3}$
49	$y=\dfrac{x^2+9}{x+4}$	50	$y=\dfrac{x^2-12}{x-4}$
51	$y=\dfrac{x^2+4}{x}$	52	$y=\dfrac{x^2+25}{x}$
53	$y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$	54	$y=\dfrac{x^2+24}{x+1}$
55	$y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$	56	$y=\dfrac{x^2+32}{x-2}$
57	$y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$	58	$y=\dfrac{x^2+27}{x+3}$
59	$y=\dfrac{x^2-15}{x+4}$	60	$y=\dfrac{x^2-7}{x-4}$

Задание 4

В *задачах 61-80* найти указанные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием (табл. 4).

Таблица 4

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Интегралы	Номер задачи	Интегралы
1	2	3	4
61	а) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$ б) $\int\left(x^2+3\right)\ln x dx$	62	а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$ б) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$
63	а) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{5-x^3}}$ б) $\int x^2\sin 3x dx$	64	а) $\int\dfrac{3xdx}{(2x^2+5)^6}$ б) $\int\ln\left(x^2+4\right)dx$

1	2	3	4
65	а) $\int \frac{\cos 3x dx}{9+\sin 3x}$ б) $\int x^2 e^{3x} dx$	66	а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$ б) $\int (2x+3)\sin 3x dx$
67	а) $\int 4x^2 e^{-x^3} dx$ б) $\int x^2 \mathrm{arctg}\, x dx$	68	а) $\int \sqrt[4]{1+2\sin x} \cos x dx$ б) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
69	а) $\int \frac{e^x dx}{\left(1+2e^x\right)^3}$ б) $\int x^3 \ln x dx$	70	а) $\int x \sin(x^2+1) dx$ б) $\int \arccos(2x) dx$
71	а) $\int \frac{(\mathrm{arctg}\,(x))^5 dx}{1+x^2}$ б) $\int x \sin(4x) dx$	72	а) $\int \frac{dx}{x(\ln^2(x)+4)}$ б) $\int x e^{-5x} dx$
73	а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x)1 dx}}{x}$ б) $\int \sqrt{x} \ln(x) dx$	74	а) $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,(2x) dx}}{1+4x^2}$ б) $\int (x-2)\cos(3x) dx$
75	а) $\int \cos(4x) e^{\sin(4x)} dx$ б) $\int \mathrm{arcctg}\,(2x) dx$	76	а) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2(x)}}$ б) $\int (x+3)\sin \frac{x}{2} dx$
77	а) $\int \frac{e^{2x} dx}{4+e^{4x}}$ б) $\int x\, \mathrm{arctg}\,(x^2) dx$	78	а) $\int \frac{(1+\mathrm{tg}\,(3x)) dx}{\cos^2(3x)}$ б) $\int (3x-2) e^{4x} dx$
79	а) $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}} dx}{\sqrt{2x+1}}$ б) $\int x \ln(x+1) dx$	80	а) $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(2x)-4}}{\cos^2(2x)}$ б) $\int \mathrm{arcctg}\,(4x) dx$

Задание 5

В *задачах 81-100* вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделать чертёж). Исходные данные к задачам приведены в таблице 5.

Таблица 5

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Уравнения линий	Номер задачи	Уравнения линий
81	$y=2x$, $y=\dfrac{1}{8x}$, $x=2$	82	$y=\dfrac{x^2}{3}$, $y=4-\dfrac{2}{3}x^2$
83	$y=-3x^2+2x-1$ $y=x^2-5x-3$	84	$y=\dfrac{x^2}{4}$, $y=16x^2$, $y=4$
85	$y=4x^2-1=0$, $y-2x=1$	86	$y=\dfrac{1}{2}x^2-3x-1$, $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x+2$
87	$y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$	88	$y=e^{3x}$, $y=e^x$, $y=8$
89	$y=2x^2+4x-7$ $y=-x^2-x+1$	90	$y=\dfrac{1}{3}(x-3)^2$, $2x-y-6=0$
91	$y=-x^2+4x-1$, $y=-x-1$	92	$y=x^2-6x+7$, $y=x+1$
93	$y=-x^2+6x-5$, $y=x-5$	94	$y=x^2-6x+7$, $y=-x+7$
95	$y=-x^2+6x-5$, $y=-x+1$	96	$y=x^3$, $y=\sqrt{x}$
97	$y=\dfrac{5}{x}$, $y=6-x$	98	$y=-x^2+1$, $y=x-1$
99	$y=3x^2+1$, $y=3x+1$	100	$y=x^2+2$, $y=4-x^2$

Задание 6

В *задачах 101-120* дана функция $z=f(x,y)$ двух переменных. Исследовать данную функцию на экстремум (табл. 6).

Таблица 6

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Функция	Номер задачи	Функция
1	2	3	4
101	$z=x^2+xy+y^2-2x-y+3$	102	$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+2$
103	$z=6x-8y-x^2-y^2-20$	104	$z=4x+5y-x^2-xy-y^2-4$
105	$z=x^2+xy+y^2+x-y+4$	106	$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+3$
107	$z=1+12x-8x^2-12xy+12y-9y^2$	108	$z=3x+9y-x^2-xy-y^2-17$
109	$z=x^2+xy+y^2+x-y+3$	110	$z=3x+6y-x^2-xy-y^2-4$
111	$z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$	112	$z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+1$

Продолжение таблицы 6

1	2	3	4
113	$z=3xy-x^2-4y^2+4x-6y-1$	114	$z=3x^2+3y^2+5xy+4x+7y+5$
115	$z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y-4$	116	$z=x^2+y^2+3xy-x-4y+1$
117	$z=x^2+y^2-xy+x+y+2$	118	$z=3x^2+3y^2+5xy+x-y+5$
119	$z=x^2+2xy-y^2+6x-10y+1$	120	$z=4-5x^2-y^2-4xy-4x-2y$

Задание 7

В *задачах 121-140* найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка (табл. 7).

Таблица 7

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Уравнение	Номер задачи	Уравнение
121	$(xy-x)dx+(xy+x-y-1)dy=0$	122	$y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$
123	$(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0$	124	$y'\operatorname{tg}(x)-y=a$
125	$\sin y\cdot\cos x\cdot dy=\cos y\cdot\sin x\cdot dx$	126	$xyy'=1-x^2$
127	$yy'=\dfrac{1-2x}{y}$	128	$(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
129	$y'=10^{x+y}$	130	$(1+e^x)yy'=e^y$
131	$dx+x\operatorname{tg}ydy=0$	132	$y'=2\sqrt{y}\ln x$
133	$(1+x^2)y+=y\sqrt{1+x^2}=xy$	134	$x+xy+y'(y+xy)=0$
135	$dy=(2y+1)\operatorname{ctg}xdx$	136	$2xy^2dx=(1+y^2)dy$
137	$y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$	138	$\dfrac{y}{y'}=\ln y$
139	$x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$	140	$(\sqrt{xy}-\sqrt{x})dx+(\sqrt{xy}-\sqrt{y})dy=0$

Задание 8

В *задачах 141-160* дан степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n x^n}{b^n\sqrt[3]{\sqrt{n+1}}}$.

При заданных значениях a и b написать первые три члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала (табл. 8).

Таблица 8

Исходные данные для решения задач

Номер задачи	Значения a и b	Номер задачи	Значения a и b
141	$a = 2$, $b = 3$	142	$a = 3$, $b = 5$
143	$a = 4$, $b = 7$	144	$a = 5$, $b = 9$
145	$a = 7$, $b = 6$	146	$a = 2$, $b = 5$
147	$a = 3$, $b = 2$	148	$a = 4$, $b = 3$
149	$a = 5$, $b = 2$	150	$a = 6$, $b = 4$
151	$a = 3$, $b = 7$	152	$a = 4$, $b = 5$
153	$a = 8$, $b = 3$	154	$a = 7$, $b = 4$
155	$a = 5$, $b = 7$	156	$a = 2$, $b = 6$
157	$a = 3$, $b = 4$	158	$a = 7$, $b = 5$
159	$a = 5$, $b = 8$	160	$a = 2$, $b = 4$

5. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

5.1. Пример выполнения задания 1

Найти пределы указанных функций:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$.

Решение

1) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, надо и в числителе, и в знаменателе дроби выделить множитель $(x-a)$ при $x \to a$ и сократить дробь на него.

Разложив числитель и знаменатель на множители, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

(При разложении квадратного трехчлена на множители используйте формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена).

2) Непосредственная подстановка вместо x его предельного значения приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, заданную отношением двух многочленов, надо числитель и знаменатель дроби разделить на x в наивысшей степени. Разделив числитель и знаменатель данной дроби на x^2 и применив основные теоремы о пределах и свойствах бесконечно малых величин, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2.$$

5.2. Пример выполнения задания 2

Найти производные функций:

1) $y = 3^{\cos^2 x} + \operatorname{arctg} 5x$, 2) $y = e^{\operatorname{ctg} x} \arcsin\sqrt{x}$.

Решение

1) Применяя правило дифференцирования сложной функции, правила и формулы дифференцирования, имеем:

$$y' = 3^{\cos^2 x}\ln 3\left(\cos^2 x\right)' + \frac{1}{1+(5x)^2}(5x)' =$$

$$= 3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(\cos x)' + \frac{1}{1+25x^2}5 =$$

$$= 3^{\cos^2 x}\ln 3\cdot 2\cos x(-\sin x) + \frac{5}{1+25x^2} =$$

$$= -3^{\cos^2 x}\ln 3\sin 2x + \frac{5}{1+25x^2}.$$

2) Применяя правило производной произведения и формулы дифференцирования, имеем:

$$y' = \left(e^{\operatorname{ctg} x}\right)'\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\left(\arcsin\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x)'\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\arcsin\sqrt{x} + e^{\operatorname{ctg} x}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}\right) =$$

$$= e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sin^2 x}\right).$$

5.3. Пример выполнения задания 3

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$ методами дифференциального исчисления и построить ее график.

Решение

1. Найдем область определения функции:

$$D(y) = \left(-\infty; 3\right) \cup \left(3; +\infty\right).$$

2. Исследуем функцию на непрерывность: $x = 3$ — точка разрыва.

Определим род точки разрыва, для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = -\infty, \quad \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = +\infty.$$

Следовательно, $x = 3$ — точка разрыва второго рода.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность:

$$y(-x) = \frac{\left(-x\right)^2 - 6\left(-x\right) + 13}{-x - 3} = \frac{x^2 + 6x + 13}{-x - 3};$$

$$y(-x) \neq y(x), \qquad y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Исследуем функцию на экстремум.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{\left(2x - 6\right)\left(x - 3\right) - \left(x^2 - 6x + 13\right)}{\left(x - 3\right)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{\left(x - 3\right)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0, \text{ если } x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 5.$$

Производная не существует при $x = 3$, но экстремума в этой точке не будет, так как это точка разрыва.

Определим знак производной в интервалах (рис. 1):

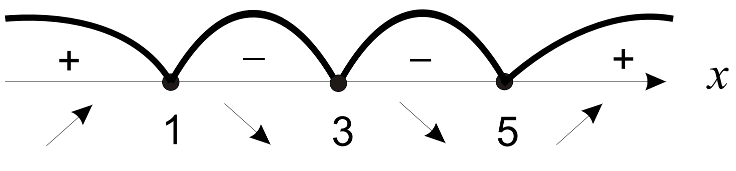

Рис. 1. Знаки производной

По достаточным условиям точки экстремума:

$x = 1$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума.

Тогда $y_{\max} = y(1) = -4$, $y_{\min} = y(5) = 4$.

Функция возрастает на (–∞; 1) и на (5; +∞).
Функция убывает на (1; 3) и на (3; 5).

5. Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
Найдём вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \right)' = \frac{\left(x^2 - 6x + 5\right)' (x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right)\left((x-3)^2\right)'}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - \left(x^2 - 6x + 5\right) 2 (x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2\cancel{(x-3)}\left((x-3)^2 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\left(x^2 - 6x + 9 - x^2 + 6x - 5\right)}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3}.$$

Найдем критические точки второго рода:

$y'' = 0$, $\dfrac{8}{(x-3)^3} = 0$, решений нет.

Вторая производная не существует при x = 3, но перегиба в этой точке нет, так как это точка разрыва. Следовательно, точек перегиба нет.

Определим знак второй производной в интервалах (рис. 2):

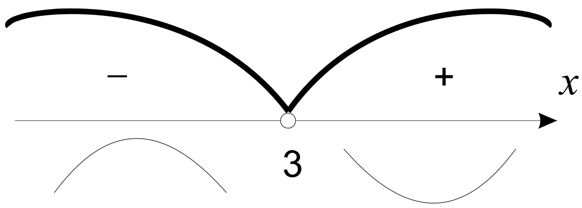

Рис. 2. Знаки второй производной

График функции выпуклый на (–∞; 3) и вогнутый на (3; +∞).

6. Найдем асимптоты графика функции.

Так как x = 3 — точка разрыва второго рода, то через нее пройдет вертикальная асимптота с уравнением x = 3.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = kx + b$.

Найдем k и b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x + 13}{x - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-3 + \frac{13}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

Итак, $y = x - 3$ — наклонная асимптота.

7. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

При $x = 0$ получим $y = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$. Следовательно, $\left(0; -4\frac{1}{3}\right)$ — точка пересечения с осью Oy.

При $y = 0$ получим $\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$, $x^2 - 6x + 13 = 0$;

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16 < 0$.

Следовательно, точек пресечения с осью Ox нет.

8. По результатам исследования строим эскиз графика функции (рис. 3).

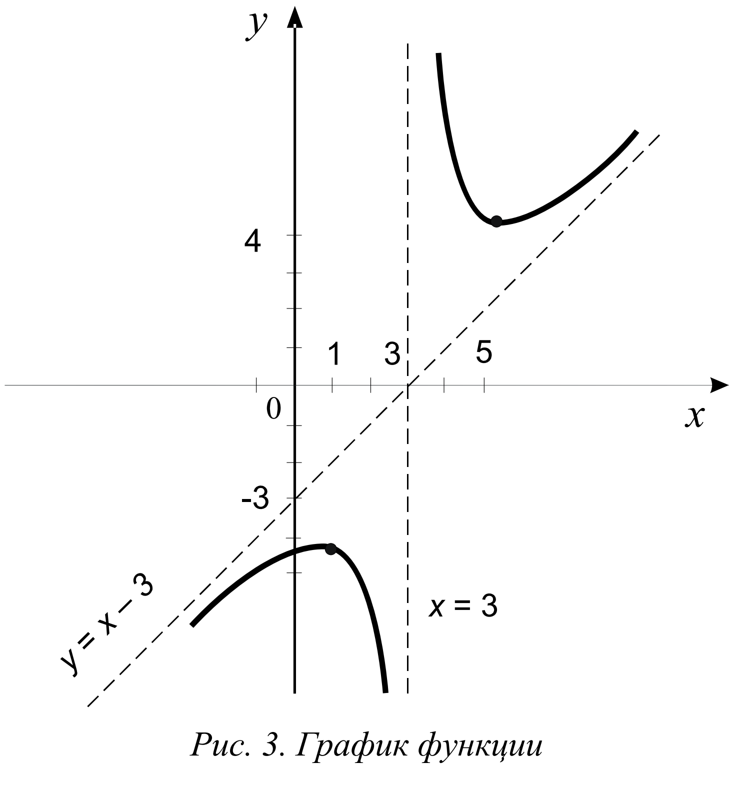

Рис. 3. График функции

5.4. Пример выполнения задания 4

Найти указанные интегралы и результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1) $\int e^{x^2+1} x\, dx,$ 2) $\int x^2 cos\ x\ dx.$

Решение

1) Вычислим интеграл методом замены переменной:

$$\int e^{x^2+1} x\ dx = \begin{bmatrix} t = x^2+1, \\ dt = 2xdx, \\ xdx = \dfrac{dt}{2}; \end{bmatrix} = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C\right)^{/} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2+1}\right)^{/} + C^{/} = \frac{1}{2}e^{x^2+1}\left(x^2+1\right)^{/} = \frac{1}{2}e^{x^2+1}2x = e^{x^2+1}x.$$

Получили подынтегральную функцию. Следовательно, интеграл вычислен верно.

2) Используем два раза формулу интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

$$\int x^2 \cos x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}\right]$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right]$$

$$= x^2 \sin x - 2\Big(x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx\Big) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Проверка:

$$\left(x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\right)^{/} =$$

$$= \left(x^2\right)^{/} \sin x + x^2\left(\sin x\right)^{/} + \left(2x\right)^{/}\cos x + 2x\left(\cos x\right)^{/} - 2\left(\sin x\right)^{/} + C^{/} =$$

$$= 2x\sin x + x^2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 2\cos x = x^2\cos x.$$

Получили подынтегральную функцию. Следовательно, интеграл вычислен верно.

5.5. Пример выполнения задания 5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$ (сделать чертеж).

Решение

Построим эскиз фигуры (рис. 4).

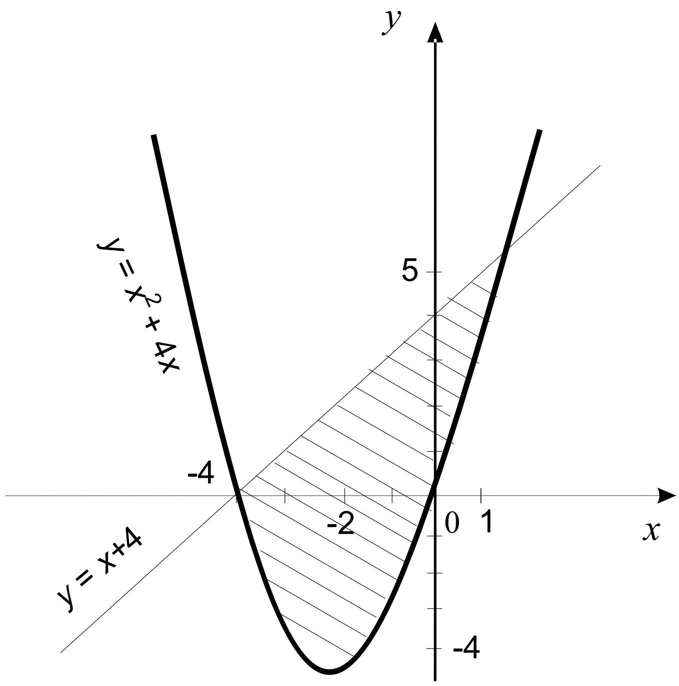

Рис. 4. Изображение фигуры

Площадь S фигуры, ограниченной сверху и снизу соответственно графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, пересекающимися в точках с абсциссами $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx.$$

Для нахождения абсцисс точек пересечения данных линий решим систему уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4; \end{cases}$$

$$x^2 + 4x = x + 4,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1.$$

Вычислим площадь фигуры:

$$S = \int_{-4}^{1} \left(x + 4 - x^2 - 4x \right) dx = \int_{-4}^{1} \left(4 - 3x - x^2 \right) dx = \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{1} =$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 16 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = 20\frac{5}{6} \left(\text{кв. ед.} \right).$$

Ответ: $S = 20\frac{5}{6} \left(\text{кв. ед.} \right)$.

5.6. Пример выполнения задания 6

Исследовать на экстремум функцию $z = 4 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Решение

Область определения заданной функции R^2.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

Найдем стационарные точки, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ -x - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4, \\ y = -2. \end{cases}$$

Следовательно, данная функция имеет одну стационарную точку $P(4; -2)$.

Находим частные производные второго порядка и их значения в точке $P(4; -2)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Как видно, частные производные второго порядка постоянны в любой точке, значит, и в точке $P(4; -2)$.

Имеем:

$$A = \frac{d^2z}{dz^2}(P) = -2,$$

$$B = \frac{d^2z}{dzdy}(P) = -1,$$

$$C = \frac{d^2z}{dy^2}(P) = -2,$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Следовательно, точка $P(4; -2)$ является точкой экстремума.
Так как $A < 0$, то точка $P(4; -2)$ — точка максимума.
$z_{\max} = z(4; -2) = -4 + 24 - 16 + 8 - 4 = 8.$

5.7. Пример выполнения задания 7

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка $xyy' = 1 - x^2$.

Решение

$xyy' = 1 - x^2$ — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, получим

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$xy\,dy = \left(1 - x^2\right)dx.$$

Разделим обе части уравнения на x:

$$ydy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int ydy = \int\left(\frac{1}{x} - x\right)dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y^2 = 2\ln|x| - x^2 + C,$$

$y^2 = \ln x^2 - x^2 + C$ — общий интеграл.

5.8. Пример выполнения задания 8

Написать первые три члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение

Возьмем последовательно n = 1, 2, 3, …. Тогда данный ряд записывается в виде

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3}+\frac{5^2x^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5^3x^3}{3^2\cdot 3^3}+\ldots+\frac{5^n x^n}{n^2\cdot 3^n}+\ldots.$$

Это степенной ряд. Для нахождения области сходимости ряда применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}5^n x^n}\right|=\frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\frac{5}{3}|x|.$$

Данный ряд сходится абсолютно при тех значениях x, которые удовлетворяют неравенству:

$$\frac{5}{3}|x|<1,\text{ или }|x|<\frac{3}{5},\text{ или }-\frac{3}{5}<x<\frac{3}{5}.$$

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x=-\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Последний ряд является знакочередующимся.

Исследуем его по признаку Лейбница:

1) абсолютная величина его общего члена стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$;

2) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\ldots.$

Следовательно, по признаку Лейбница ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ сходится. Значит, $x=-\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

При $x=\frac{3}{5}$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Исследуем сходимость этого ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=0+1=1\,.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Значит, $x=\frac{3}{5}$ принадлежит области сходимости данного степенного ряда.

Таким образом, $-\frac{3}{5}\le x\le\frac{3}{5}$ — область сходимости данного степенного ряда.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Понятие функции. Основные свойства функций. Способы задания функций.

2. Понятие неявной, обратной, сложной функций.

3. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

4. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности.

5. Предел функции при $x \to a$ (в точке $x = a$). Односторонние пределы.

6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин, их связь.

7. Основные теоремы о пределах.

8. Первый и второй замечательные пределы.

9. Непрерывность функции. Точки разрыва, их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

10. Определение производной. Механический, геометрический, экономический смыслы производной.

11. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций.

12. Вывод формул производных основных элементарных функций.

13. Производные неявной и параметрически заданной функций.

14. Понятие о производных высших порядков.

15. Дифференциал функции $y = f(x)$, его геометрический смысл. Дифференциалы высших порядков. Применение дифференциала в приближенных вычислениях значений функций.

16. Теорема Ферма, ее геометрический смысл.

17. Теорема Роля, ее геометрический смысл.

18. Теорема Коши, ее геометрический смысл.

19. Теорема Лагранжа, ее геометрический смысл.

20. Правило Лопиталя.

21. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции одной переменной.

22. Максимум и минимум функции одной переменной. Необходимое условие существования экстремума функции одной переменной.

23. Первый достаточный признак существования экстремума функции одной переменной, основанный на знаке первой производной.

24. Второй достаточный признак существования экстремума функции одной переменной, основанный на знаке второй производной.

25. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной на отрезке.

26. Выпуклость и вогнутость графика функции одной переменной. Необходимое и достаточное условия выпуклости и вогнутости графика функции.

27. Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба графика функции одной переменной.

28. Асимптоты графика функции $y = f(x)$.

29. Определение функции двух независимых переменных. Область определения, график функции двух независимых переменных.

30. Предел и непрерывность функции двух независимых переменных.

31. Частные производные первого порядка функции двух независимых переменных.

32. Частные и полный дифференциалы функции двух независимых переменных. Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях.

33. Частные производные высших порядков функции двух независимых переменных.

34. Необходимые и достаточные условия существования экстремума функции двух независимых переменных.

35. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.

36. Условный экстремум.

37. Первообразная. Определение и свойства неопределенного интеграла.

38. Замена переменной в неопределенном интеграле.

39. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

40. Вычисление интегралов от дробно-рациональных функций.

41. Вычисление интегралов $\int \sin^m x \cos^n x dx$. Универсальная тригонометрическая подстановка.

42. Интегрирование некоторых иррациональных выражений:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx, \ \int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^\alpha}, \ ..., \ \sqrt[m]{(ax+b)^\beta}\right)dx.$$

43. Задача о площади криволинейной трапеции, приводящая к определению определенного интеграла. Определение определенного интеграла, его основные свойства.

44. Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

45. Формула Ньютона-Лейбница.

46. Несобственные интегралы 1-го и 2-го родов.

47. Нахождение площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

48. Нахождение объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

49. Понятие дифференциального уравнения. Порядок дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Задача Коши.

50. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными, способ их решения.

51. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка, способ их решения.

52. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка, способ их решения.

53. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка, способ их решения.

54. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, способ их решения.

55. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, способ их решения.

56. Понятия числового ряда, суммы ряда, сходимости ряда. Необходимый признак сходимости ряда.

57. Достаточные признаки сходимости ряда (Даламбера, интегральный и радикальный Коши, признаки сравнения).

58. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

59. Степенные ряды, область сходимости.

60. Ряд Тейлора и ряд Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основная литература

1. Демидович, В.П. Краткий курс высшей математики [Текст] : учеб. пособие для вузов / В.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. — М. : АСТ ; Астрель, 2008. — 654 с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : Тридцать шесть лекций [Текст] : в 2-х ч. Ч. 1 / Д.Т. Письменный. — 6-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2008. — 288 с.
3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике : Тридцать пять лекций [Текст] : в 2-х ч. Ч. 2 / Д.Т. Письменный. — 6-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2008. — 256 с.
4. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для втузов / В.П. Минорский. — 14-е изд., испр. — М. : Физико-математическая литература, 2003. — 336 с.

Дополнительная литература

5. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. — М : Астрель ; АСТ, 2002. — 992 с.
6. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ЮНИТИ, 2003. — 471 с.
7. Высшая математика для экономических специальностей [Текст] : учебник и практикум для вузов. Ч. 1, 2 / Н.Ш. Кремер, ред. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Высшее образование, 2008. — 893 с.
8. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории [Текст] : учебное пособие для вузов / А.Ю. Вдовин [и др.]. — СПб. : Лань, 2009. — 192 с.
9. Комплексные числа [Текст] : учебное пособие по математике для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения / сост. А.И. Марусич. — 2-е изд., стереотип. — Кострома : КГСХА, 2009. — 22 с.
10. Кремер, Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики [Текст] : учебно-справочное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко. — М. : Высшее образование, 2007. — 646 с.
11. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты [Текст] : учебное пособие для вузов / Л.А. Кузнецов. — 10-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2008. — 240 с.
12. Малыхин, В.И. Математика в экономике [Текст] : учеб. пособие / В.И. Малыхин. — М. : ИНФРА-М, 2002. — 352 с.

13. Математика. Ряды [Текст] : методические рекомендации для студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения / сост. Н.М. Воробьева, Л.А. Глебцева. — 2-е изд., перераб. — Кострома : КГСХА, 2010. — 26 с.

14. Математика в экономике [Текст] : учебник для вузов : в 2-х ч. Ч. 1 / А.С. Солодовников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2005. — 384 с.

15. Математика в экономике [Текст] : учебник для вузов : в 2-х ч. Ч. 2 / А.С. Солодовников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2003. — 560 с.

16. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики [Текст] : учебник для вузов / И.П. Натансон. — 6-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2003. — 736 с.

17. Рудин, У. Основы математического анализа [Текст] : учебник / У. Рудин. — 4-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2004. — 320 с.

18. Старков, С.Н. Справочник по математическим формулам и графикам функций для студентов [Текст] / С.Н. Старков. — СПб. : Питер, 2009. — 235 с. : ил. — (Учебное пособие).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. $(uv)' = u'v + uv'$.

2.1. $(cu)' = cu'$, где $c = const$.

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

4. $y'_x = y'_u u'_x$, где $y = (u)$, а $u = \varphi(x)$.

5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, где $y = f(x)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$

2. $(u^a)' = au^{a-1}$

2.1. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

2.2. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}u'$

3. $(a^u)' = a^u \ln a u'$

3.1. $(e^u)' = e^u u'$

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}u'$

4.1. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

6. $(\cos u)' = -\sin u u'$

7. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$

8. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$

9. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

10. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

11. $\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{1}{1+u^2}u'$

12. $\left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int u^a du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

4. $\int e^u du = e^u + C$

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u du = \sin u + C$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

8. $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C$

9. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$

10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

13. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$

14. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Для заметок

Учебно-методическое издание

Математический анализ : методические рекомендации по организации самостоятельной работы и выполнению контрольной работы для студентов 1 курса направления подготовки 38.03.01 «Экономика» заочной формы обучения / сост. Л.Б. Рыбина, Н.М. Воробьёва. — 2-е изд., испр. — Караваево : Костромская ГСХА, 2015. — 46 с.

Гл. редактор Н.В. Киселева
Редактор выпуска Т.В. Тарбеева
Корректор Т.В. Кулинич