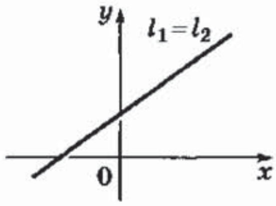
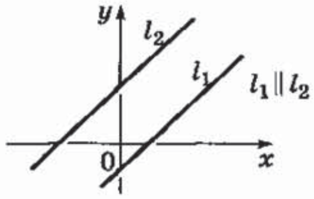
Исключения





• $l_1 \parallel l_2$, т.е. графики первого (прямая l_1) и второго (прямая l_2) уравнений параллельны.

Это возможно в том случае, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — не пропорциональны, т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Вопросы и упражнения

1. Какова геометрическая интерпретация решений системы двух уравнений с двумя неизвестными?
2. При каком условии система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?
3. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь ровно два решения?
4. В чем состоит теорема, обратная теореме Виета?
5. Как выражается сумма квадратов и сумма кубов чисел через их сумму и произведение?
6. Приведите пример уравнения, решение которого полезно сводить к решению симметричной системы.

Занятие 4
Решение неравенств

Стандартные неравенства

$$\sqrt{x-1} < 2.$$

ОДЗ: $x \geq 1$, или $[1; +\infty)$.

$x = 2$ — одно из решений неравенства, так как $\sqrt{2-1} < 2$.

Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x - 1 < 2^2, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Ответ: $[1; 5)$.

Неравенство $x - 1 < 2^2$ является следствием исходного, но не равносильно ему.

Что следует вспомнить перед решением неравенств?

1. *Что значит решить неравенство*?

Неравенство с одним неизвестным получается, когда соединяют знаком неравенства два выражения, содержащих одну букву (одно неизвестное), или, что близко по смыслу, две функции от одной и той же переменной.

Ограничимся неравенствами с одним неизвестным.

Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства — множество значений неизвестного, при подстановке которых получается осмысленное числовое неравенство.

Решение неравенства — это такое значение неизвестного, при подстановке которого получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти, описать множество его решений.

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Одно неравенство является *следствием* другого, если множество его решений содержит в себе множество решений второго.

Иными словами, при переходе от одного неравенства к другому — его следствию, мы не должны терять ни одного решения исходного неравенства.

Обычно это оформляется таким рассуждением: пусть верно ... (исходное неравенство), тогда верно ... (его следствие).

Ясно, что каждое из равносильных неравенств является следствием другого.

2. *Стандартные неравенства.*

Решение неравенств (так же как и решение уравнений) обычно распадается на два шага: преобразование неравенства к одному из стандартных; решение стандартного неравенства.

К стандартным неравенствам относятся следующие типы неравенств (из возможных четырех знаков неравенства выбираем один):

1) линейное неравенство

$$ax + b > 0;$$

2) кусочно-линейное неравенство

$$|ax + b| < 0;$$

3) квадратное неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0;$$

4) степенное неравенство

$$x^n > a;$$

5) показательное неравенство

$$a^x > b;$$

6) логарифмическое неравенство

$$\log_a x > b.$$

Линейное неравенство

$$-2x + 3 > x + 5.$$

$$-2x+3>x+5 \Leftrightarrow 3x<-2 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Кусочно-линейное неравенство

$$|2x - 3| \le 5.$$

$$|2x - 3| \le 5 \Leftrightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right| \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2} \le x \le \frac{3}{2}+\frac{5}{2}.$$

Ответ: $[-1; 4]$.

Квадратное неравенство

$$-2x^2 + 5x - 3 < 0.$$

$-2x^2 + 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 > 0$; корни уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Степенное неравенство

$$x^3 < -1.$$

$$x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1.$$

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Показательное неравенство

$$2^x \ge -1.$$

Так как левая часть строго положительна, то неравенство выполняется при всех x.

Ответ: x — любое число.

Логарифмическое неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -1.$$

ОДЗ: $x < 3$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -1 \Leftrightarrow 0 < 3 - x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 3. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 3)$.

Умножение на одну и ту же функцию

- $\frac{\sqrt{x}}{x+1} < \frac{2}{5}$. ОДЗ: $x \ge 0$.

Умножим на $x + 1$. Это не нарушает равносильности, так как на ОДЗ $x + 1 > 0$:

$$\sqrt{x} < \frac{2}{5}\ (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{25}(x^2 + 2x + 1), \\ x \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 17x + 4 > 0, \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left[0;\ \frac{1}{4}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

- $\sqrt{x+2} > x$. ОДЗ: $x \ge -2$.

Из трех комбинаций знаков остались две, так как $\sqrt{x+2}$ всегда ≥ 0.

Если $-2 \le x \le 0$, то неравенство верно, так как слева стоит положительное число, а справа — отрицательное. Пусть $x \ge 0$:

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > x^2, \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x < 2.$$

Ответ: $[-2;\ 2)$.

Логарифмирование — потенцирование

- $\log_2(x - 1) < \log_2(3 - x)$. ОДЗ: $(1;\ 3)$.

$$\begin{cases} x - 1 < 3 - x, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: $(1;\ 2)$.

3. *Переход к следствию.*

Разберем основные трудности, которые встречаются при переходе от неравенства к его следствию:

1) *умножение на одну и ту же функцию* (например, освобождение от знаменателя). Этот прием рекомендуется выполнять лишь при уверенности, что множитель сохраняет постоянный знак (для всех допустимых значений неизвестного). В противном случае лучше перенести все члены в одну часть неравенства и воспользоваться методом интервалов;

2) рассмотрим неравенство $a > b$. Если $b \ge 0$ (тогда $a > 0$), то из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^2 > b^2$.

Обратно, из неравенства $a^2 > b^2$ при дополнительных условиях $b \ge 0$, $a \ge 0$ следует неравенство $a > b$.

Пусть теперь $b < 0$.

Если при этом $a \ge 0$, то неравенство $a > b$ верно.

Если же $b < 0$ и $a < 0$, то из неравенства $a^2 < b^2$ следует неравенство $a > b$.

Верно и обратное: из неравенства $a > b$ при соблюдении условий $b < 0$, $a < 0$ следует неравенство $a^2 < b^2$.

Эти рассуждения исчерпывают все возможные случаи (их получилось три: 1) $a \ge 0$ и $b \ge 0$; 2) $b < 0$ и $a \ge 0$; 3) $b < 0$ и $a < 0$);

3) *логарифмирование — потенцирование*. Эти преобразования совершаются с помощью строго монотонных функций, поэтому следить за сохранением равносильности здесь проще — главная трудность связана с сохранением ОДЗ.

4. *Замена неизвестного.* Решая неравенство, часто полезно делать замену неизвестного. При этом, как правило, приходится решать неравенство не на всей его естественной области определения, а на меньшей.

Например, при замене выражения $f(x)$ через y приходим к неравенству $F(y) > 0$.

Последнее неравенство нужно решать не на всей области определения функции F, а на ее пересечении с областью значений функции f.

В чем состоит важнейший метод решения неравенств — метод интервалов?

Метод интервалов — метод нахождения знака выражения (а значит, и решения неравенства) с помощью разбиения ОДЗ выражения на интервалы (промежутки), на каждом из которых выражение сохраняет постоянный знак.

В простейшем виде схема применения метода интервалов в случае, когда выражение раскладывается на линейные множители, выглядит следующим образом:

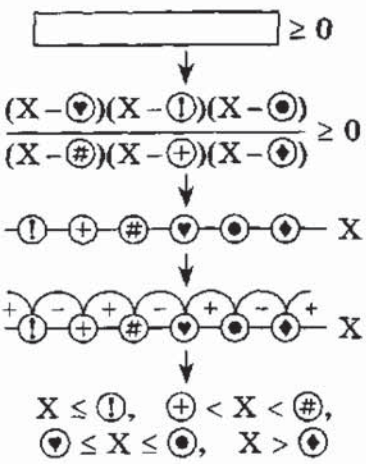
Алгоритм

Разложить на линейные множители

Нанести корни на числовую ось

Расставить знаки на интервалах

Записать ответ



Метод интервалов основан на том, что функция, непрерывная на некотором интервале и не обращающаяся на нем в нуль, сохраняет на этом интервале постоянный знак.

Соображения непрерывности позволяют применять метод интервалов не только к произведению линейных множителей, но и к произведению любых множителей, корни которых известны.

Методом интервалов решаются, прежде всего, рациональные неравенства, т.е. неравенства, в одной части которых стоит рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, а в другой части — нуль.

Разбиение на интервалы применяется не только для решения неравенств, но и для преобразования выражений (необходимых в процессе решения уравнений и неравенств), зависящих от его знака.

Замена неизвестного

$2^{2x+3} - 2^{x+5} + 14 \geq 0.$

Замена: $2^{x+1} = z$, ОДЗ: $z > 0$.

$2^{2x+3} - 2^{x+5} + 14 \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2z^2 - 16z + 14 \geq 0,\ z > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow z^2 - 8z + 7 \geq 0,\ z > 0$; корни 1; 7; $z \in (0;\ 1] \cup [7;\ +\infty)$.

$z \in (0;\ 1] \Leftrightarrow 0 < 2^{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \leq -1$; $z \in [7;\ +\infty) \Leftrightarrow 2^{x+1} \geq 7 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \geq -1 + \log_2 7$.

Ответ: $(-\infty;\ -1] \cup [-1 + \log_2 7;\ +\infty)$.

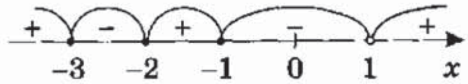
Метод интервалов

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}.$$

Перенесем правую часть влево, приведем к общему знаменателю и разложим на множители числитель дроби:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0.$$



Применяя метод интервалов, с помощью числовой оси решаем неравенство и получаем ответ: $x < -3$, $-2 < x < -1$, $x > 1$.

Его можно записать в виде объединения интервалов.

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (-2;\ -1) \cup \cup (1;\ +\infty)$.

Возведение неравенства в квадрат

$$\sqrt{x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} \geq \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}.$$

Замечаем, что

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Определяем знак выражения $x^2 - \dfrac{1}{2}$ на интервалах:

$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} > 0;$$

$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2} < 0.$

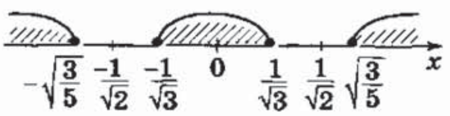
На объединении первых двух интервалов получаем неравенство

$$x^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{3}{5}.$$

На интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ имеем неравенство

$$\frac{1}{2} - x^2 \geq \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Наносим все корни на числовую ось и записываем ответ.



Ответ:

$$\left(-\infty; -\sqrt{\frac{3}{5}}\right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup$$

$$\cup \left[\sqrt{\frac{3}{5}}; +\infty\right).$$

Типичными примерами являются следующие преобразования:

1) *раскрытие модуля.*

Преобразование основано на том, что:

- $|\square| = \square$, если $\square \geq 0$;
- $|\square| = -\square$, если $\square \leq 0$.

Если в процессе преобразований нужно избавиться от модуля, необходимо рассмотреть интервалы, на которых выражение $\square$ сохраняет постоянный знак;

2) *возведение неравенства в квадрат.*

Если неравенство имеет вид $\sqrt{\square} = \bigcirc$, то его полезно рассматривать на отдельных интервалах, где $\bigcirc$ сохраняет постоянный знак:

- если $\bigcirc \geq 0$, то его можно возвести в квадрат, т. е. на этом интервале оно равносильно неравенству $\square \geq \bigcirc^2$;
- если $\bigcirc < 0$, то его и «решать не нужно»: оно верно при всех тех x из ОДЗ, для которых $\bigcirc < 0$;

3) *извлечение квадратного корня.*

Если под знаком радикала стоит полный квадрат, то при извлечении корня можно воспользоваться

- знаком модуля ($\sqrt{x^2} = |x|$);
- применить метод интервалов.

? Вопросы и упражнения

1. Какие неравенства называются равносильными?
2. Какой вид может иметь множество решений линейного неравенства? квадратного неравенства?
3. Какие стандартные неравенства вы знаете? Какими могут быть множества их решений?
4. В чем состоит алгоритм решения рационального неравенства методом интервалов?
5. Какое свойство непрерывной функции используется в методе интервалов?
6. Как применяется метод интервалов для раскрытия модуля?