4. Какие связи возможны между уравнениями □ · ○ = □ · ■ и ○ = ■, полученными из исходного сокращением на выражение □?

5. Какие замены неизвестного встречаются наиболее часто?

6. В уравнении вида $F(f(x)) = 0$ сделана замена $f(x) = y$ и получено уравнение вида $F(y) = 0$. Какова его область допустимых значений?

7. Приведите примеры показательных уравнений заменой неизвестного, приводящихся к линейному уравнению; к квадратному уравнению; к алгебраическому уравнению более высокой степени.

8. Из-за чего может произойти потеря корней при решении однородного уравнения? Приведите пример.

Занятие 3
Системы уравнений

Метод подстановки

Рассмотрим четыре системы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 4xy, \\ x + y = \dfrac{3}{2}xy. \end{cases}$

Второе уравнение в системах можно решить относительно y, т.е. преобразовать к виду $y = f(x)$:

1) $x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1$;

2) $x^2 + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x^2$;

3) $xy = 3 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{x}$;

4) $x + y = \dfrac{3}{2}xy \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{\dfrac{3}{2}x - 1}$.

Подставляя $y = f(x)$ в первое уравнение систем, получим уравнение с одним неизвестным:

1) $x^2 + (x - 1)^2 = 25$;

2) $x^2 + (3 - x^2)^2 = 5$;

Каковы основные методы решения систем уравнений?

1. *Метод подстановки.*

Системы уравнений появляются при решении задач, в которых неизвестной является не одна величина, а несколько. Эти величины связаны определенными зависимостями, которые записываются в виде уравнений.

Один из основных методов решения систем — метод подстановки.

Рассмотрим, например, систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y, \\ (2 - y) + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Часто удается одно уравнение преобразовать так, чтобы одно неизвестное явно выражалось как функция другого. Тогда, подставляя его во второе уравнение, получим уравнение с одним неизвестным.

Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными методом подстановки:

$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x - y - 2z = -2, \\ 3x + 4y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ 2(4 - y - z) - y - 2z = -2, \\ 3(4 - y - z) + 4y - 5z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ y = 8z - 6, \\ 3(8z-6) + 4z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y - z, \\ y = 8z - 6, \\ 28z = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

2. *Использование графика.*

Каждое из уравнений системы можно рассматривать как уравнение кривой. Поэтому решения системы двух уравнений с двумя неизвестными можно интерпретировать как координаты точек пересечения двух кривых.

3. *Линейные системы.*

В математике и ее приложениях большую роль играют системы линейных уравнений. Любую такую систему можно решить способом подстановки. Выражая из одного уравнения системы одно неизвестное и подставляя в другие уравнения системы, мы уменьшим число уравнений и неизвестных системы, сохраняя ее линейность.

4. *Симметричные системы.*

Система уравнений называется симметричной, если она составлена из выражений, симметричных относительно неизвестных:

1) $x^2 + y^2$;

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

3) $(x - y)^2$;

4) $x^3 + y^3$;

5) $\dfrac{x-1}{y} + \dfrac{y-1}{x}$;

6) $x + y + z$;

7) $xy + yz + zx$;

8) xyz и т. д.

Возьмем две буквы x и y.

Два выражения — их сумма $u = x + y$ и произведение $v = xy$ — являются основными симметричными выражениями относительно x и y.

Другие симметричные выражения можно выразить через u и v:

1) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$;

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{u}{v}$;

3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = u\,(u^2 - 3v)$.

Теорема Виета выражает основные симметричные выражения относительно корней x_1

3) $\dfrac{1}{x} + x = 2$;

4) $2x + \dfrac{3x}{\frac{3}{2}x - 1} = 4x\dfrac{x}{\frac{3}{2}x-1}$.

Решая уравнение, находим его корни — значения неизвестного x, а затем для каждого из них — соответствующее значение y по формуле $y = f(x)$:

1) $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1; \end{cases}$

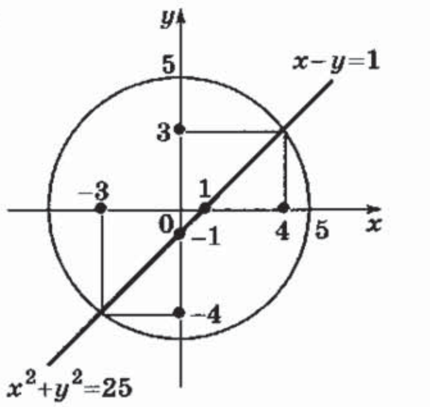
3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

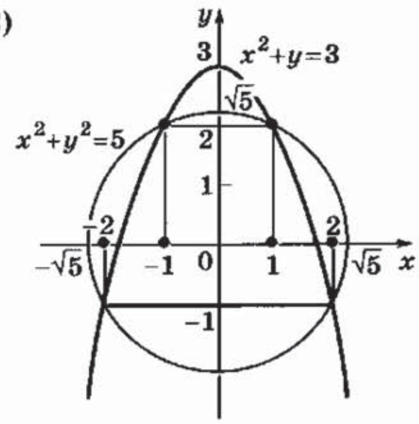
Геометрическая интерпретация

Дадим геометрическую интерпретацию четырех рассмотренных систем.

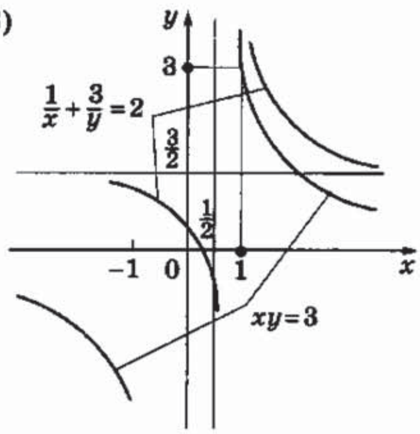
1)



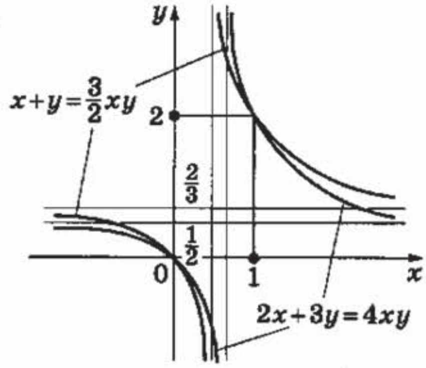
2)



3)



4)



Примеры

1. $2x^2 + 5x - 4 = 0$:

$$u = x_1 + x_2 = -\frac{5}{2},\ v = x_1x_2 = -2.$$

1) $x_1^2 + x_2^2 = u^2 - 2v = \dfrac{41}{4}$;

2) $$\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{u-2}{v-u+1} = \frac{-\frac{5}{2}-2}{-2+\frac{5}{2}+1} = -3;$$

3) $$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{u^3 - 3uv}{v} = \frac{-\frac{125}{8}-15}{-2} = \frac{245}{16}.$$

2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2 + 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$

Воспользуемся найденным выражением $x^3 + y^3$ через u и v:

$$\begin{cases} u\ \ (u^2 - 3v) = 7, \\ u^2 + v = -1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

и x_2 квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ через коэффициенты:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q. \end{cases}$$

Любое выражение, симметричное относительно корней квадратного уравнения, можно выразить через его коэффициенты, не находя самих корней (см. примеры в узкой колонке).

Можно сформулировать теорему, обратную теореме Виета: если числа x_1 и x_2 удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1x_2 = q \end{cases}$, то они являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство этой теоремы получается подстановкой $x_2 = -p - x_1$ из первого уравнения системы во второе.

Симметричную систему можно упростить заменой симметричных выражений выражениями через сумму и произведение неизвестных.

Например, систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7 \end{cases}$ заменой $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v \end{cases}$ можно привести к системе $\begin{cases} u^2 - 2v = 25, \\ u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 7, \\ v = 12. \end{cases}$

Зная u и v, по теореме, обратной к теореме Виета, находим x и y из квадратного уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$: $t_1 = 3$, $t_2 = 4$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Решение некоторых уравнений полезно сводить к решению симметричных систем.

Например, при решении линейной системы часто можно воспользоваться ее симметрией:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11, \\ 2x + 3y + 4z + t = 12, \\ 3x + 4y + z + 2t = 13, \\ 4x + y + 2z + 3t = 14. \end{cases}$$

Сложим все уравнения и получим $10x + 10y + 10z + 10t = 50$, или $x + y + z + t = 5$.

Теперь вычтем это уравнение из первых трех уравнений:

$$\begin{cases} y + 2z + 3t = 6, \\ y + 2z - t = 2, \\ y - 2z - t = -2. \end{cases}$$

Разность первой пары уравнений дает

$$4t = 4 \Leftrightarrow t = 1;$$

второго и третьего уравнений:

$$4z = 4 \Leftrightarrow z = 1.$$

Далее подстановкой находим $y = 1$ и $x = 2$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$

Что можно сказать об исследовании системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде?

Исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть дана система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

График первого уравнения — прямая l_1.

График второго уравнения — прямая l_2.

Решением системы будет точка пересечения графиков с координатами $A(x_0;\ y_0)$.

Исключениями являются следующие случаи:

• $l_1 = l_2$, т.е. графики первого и второго уравнений совпадают.

Это возможно в случае пропорциональности коэффициентов при неизвестных (a_1, a_2, b_1 и b_2) и свободных членов (c_1 и c_2), т.е.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2};$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-1)(4u^2+4u+7) = 0, \\ v = -1 - u^2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-1=0, \\ 4u^2+4u+7=0 \text{ — корней нет;} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow u = 1.$$

Далее решаем систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

3. $\sqrt[3]{x+15} - \sqrt[3]{x-4} = 1.$

Заменяем $\sqrt[3]{x+15} = z;$

$$\sqrt[3]{x-4} = t.$$

$$\begin{cases} z - t = 1, \\ z^3 - t^3 = 19, \end{cases}$$

$$z^3 - t^3 = (z - t)(z^2 + zt + t^2) = 19.$$

Если $z - t = 1$, то $z^2 + zt + t^2 = 19$.

Решаем симметричную (относительно z и $-t$) систему:

$$\begin{cases} z + (-t) = 1, \\ (z-t)^2 - 3z(-t) = 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(-t) = -6, \\ z + (-t) = 1; \end{cases}$$

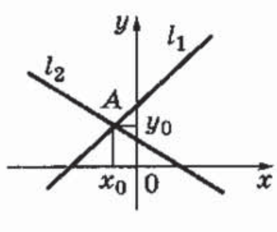
$$\begin{cases} z_1 = 3, \\ t_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} z_2 = -2, \\ t_2 = -3; \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{x+15} = 3 \Leftrightarrow x = 12;$$

$$\sqrt[3]{x+15} = -2 \Leftrightarrow x = -23.$$

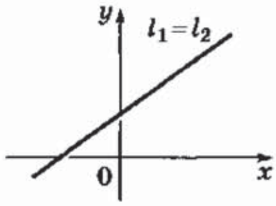
Ответ: -23; 12.

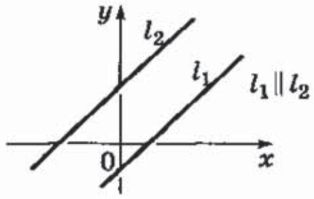
Главный случай



$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Исключения





• $l_1 \parallel l_2$, т.е. графики первого (прямая l_1) и второго (прямая l_2) уравнений параллельны.

Это возможно в том случае, когда коэффициенты при неизвестных пропорциональны, а свободные члены — не пропорциональны, т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Вопросы и упражнения

1. Какова геометрическая интерпретация решений системы двух уравнений с двумя неизвестными?
2. При каком условии система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет единственное решение?
3. Может ли система двух линейных уравнений с двумя неизвестными иметь ровно два решения?
4. В чем состоит теорема, обратная теореме Виета?
5. Как выражается сумма квадратов и сумма кубов чисел через их сумму и произведение?
6. Приведите пример уравнения, решение которого полезно сводить к решению симметричной системы.

Занятие 4
Решение неравенств

Стандартные неравенства

$$\sqrt{x-1} < 2.$$

ОДЗ: $x \geq 1$, или $[1; +\infty)$.

$x = 2$ — одно из решений неравенства, так как $\sqrt{2-1} < 2$.

Неравенство равносильно системе $\begin{cases} x-1 < 2^2, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Ответ: $[1; 5)$.

Неравенство $x - 1 < 2^2$ является следствием исходного, но не равносильно ему.

Что следует вспомнить перед решением неравенств?

1. *Что значит решить неравенство?*

Неравенство с одним неизвестным получается, когда соединяют знаком неравенства два выражения, содержащих одну букву (одно неизвестное), или, что близко по смыслу, две функции от одной и той же переменной.

Ограничимся неравенствами с одним неизвестным.

Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства — множество значений неизвестно-