Пример 7. Решить уравнение $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40.$

Решение. Заметив, что левая часть уравнения имеет структуру $A^2 + B^2$, где $A = x$, $B = \dfrac{9x}{9+x}$, выделим в левой части полный квадрат, прибавив и отняв $2AB$, т. е. $2x \cdot \dfrac{9x}{9+x}$. Получим:

$$\left(x^2 + \frac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x \cdot \frac{9x}{9+x}\right) + 2x \cdot \frac{9x}{9+x} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{9+x}\right)^2 + \frac{18x^2}{9+x} - 40 = 0.$$

Новая переменная «проявилась»: $u = \dfrac{x^2}{9+x}$. Относительно этой новой переменной мы получили квадратное уравнение $u^2 + 18u - 40 = 0$. Находим его корни: $u_1 = 2$, $u_2 = -20$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность уравнений:

$$\frac{x^2}{9+x} = 2; \quad \frac{x^2}{9+x} = -20.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $1 \pm \sqrt{19}$.

4. Функционально-графический метод

Идея графического метода решения уравнения $f(x) = g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а затем найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Графическим методом вы не раз пользовались, начиная с курса алгебры 7-го класса. Этот метод позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней.

В некоторых случаях построение графиков функций можно заменить ссылкой на какие-либо свойства функций (потому-то мы говорим не о графическом, а о *функционально-графическом методе* решения уравнений). Если, например, одна из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ возрастает, а другая — убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ либо не имеет корней, либо имеет один корень (который иногда можно угадать). Этим приемом мы уже пользовались при решении иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

Упомянем еще одну довольно красивую разновидность функционально-графического метода: *если на промежутке X наибольшее значение одной из функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке X равносильно системе уравнений*

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

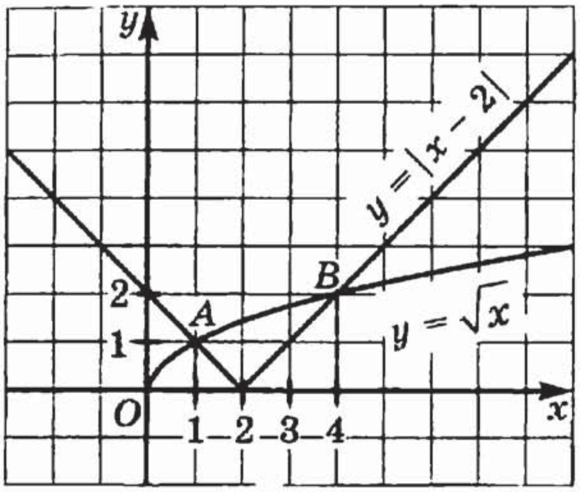

Рис. 92

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x} = |x - 2|.$$

Р е ш е н и е. Графики функций

$$y = \sqrt{x} \text{ и } y = |x - 2|$$

изображены на рисунке 92. Они пересекаются в точках $A(1;\ 1)$ и $B(4;\ 2)$. Значит, уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Ответ: 1; 4.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^5 + 5x - 42 = 0.$$

Р е ш е н и е. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $2^5 + 5 \cdot 2 - 42 = 0$. Докажем, что это единственный корень.

Преобразуем уравнение к виду $x^5 = 42 - 5x$. Замечаем, что функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 10. Решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$.

Р е ш е н и е. Замечаем, что $x = 2$ — корень уравнения, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$ — верное равенство. Докажем, что это единственный корень.

Разделив обе части уравнения на 4^x, преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Замечаем, что функция $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ убывает, а функция $y = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ возрастает. Значит, уравнение имеет только один корень.

Ответ: 2.

Пример 11. Решить уравнение $\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$. Ее графиком служит парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, в вершине параболы функция достигает своего наименьшего значения. Абсциссу вершины параболы найдем из уравнения $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2;$$
$$2x - 2 = 0;$$
$$x = 1.$$

Если $x = 1$, то $y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$.

Итак, для функции $y = x^2 - 2x + 2$ получили $y_{\text{наим}} = 1$. В то же время функция $y = \cos 2\pi x$ обладает свойством: $y_{\text{наиб}} = 1$. Значит, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем: $x = 1$. Поскольку это значение удовлетворяет и первому уравнению системы, то оно является единственным решением системы и, следовательно, единственным корнем заданного уравнения.

Ответ: 1.

Упражнения

24.1. Будет ли уравнение вида $h(f(x)) = h(g(x))$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$:

а) $3^{2-x} = 3^{x^2-4x}$;

б) $(3x^2 - 2)^4 = (x - 3)^4$;

в) $\sqrt[3]{7 - x} = \sqrt[3]{5x + 1}$;

г) $\lg \frac{1}{x} = \lg (2x - 7)$?

Решите уравнение:

○**24.2.** а) $2^{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{32}$; б) $10^{\log_2(x-3)} \cdot 0{,}00001 = 0{,}1^{\log_2(x-7)}$.

○**24.3.** а) $0{,}5^{\sin x - \cos x} = 1$; б) $\left(\sqrt{3}\right)^{\sin^2 x - 1} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt[4]{729}$.

○**24.4.** а) $\log_3(x^2 - 10x + 40) = \log_3(4x - 8)$;

б) $\log_{\sqrt{3}} \frac{x-2}{2x-4} = \log_{\sqrt{3}} \frac{x+1}{x+2}$.

○**24.5.** а) $(x^2 - 6x)^5 = (2x - 7)^5$;

б) $\left(\sqrt{6x - 1} + 1\right)^9 = \left(\sqrt{6x + 8}\right)^9$.

○24.19. а) $7^{2x+1} - 50 \cdot 7^x = -7$; в) $4\sin^2 x + 4 = 17\sin x$;

б) $\log_2^2 x + 12 = 7\log_2 x$; г) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$.

○24.20. а) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0$; в) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0$;

б) $3^x + 3^{-x+1} = 4$; г) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}$.

Решите уравнение, используя функционально-графические методы:

○24.21. а) $x = \sqrt[3]{x}$; б) $|x| = \sqrt[5]{x}$.

○24.22. а) $2^x = 6 - x$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$.

○24.23. а) $(x-1)^2 = \log_2 x$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

○24.24. а) $1 - \sqrt{x} = \ln x$; б) $\sqrt{x} - 2 = \frac{9}{x}$.

Решите уравнение:

○24.25. а) $(x-1)^4 + 36 = 13(x^2 - 2x + 1)$;

б) $(2x+3)^4 - 9 = 8(4x^2 + 12x + 9)$.

○24.26. а) $\sqrt{6x^2 - 3} = \sqrt{5x - 2}$;

б) $\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

○24.27. а) $\sqrt{2x^2 - 11x + 6} = 2x - 9$; б) $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 2x - 4$.

○24.28. а) $16x - 15\sqrt{x} - 1 = 0$; в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$;

б) $2 - x + 3\sqrt{2 - x} = 4$; г) $5\sqrt{x+3} + x + 3 = 6$.

○24.29. а) $\sqrt[5]{x} - \sqrt[10]{x} - 2 = 0$; в) $\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 8 = 0$;

б) $\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$; г) $3\sqrt[4]{x} - \sqrt[8]{x} - 2 = 0$.

○24.30. а) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3}$.