с единственным корнем $x = 0$. На самом деле указанное тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней:

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}, \;\; x = \frac{\pi n}{5}; \; n \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Метод разложения на множители

Суть этого метода заключается в следующем: уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$f(x) = 0; \;\; g(x) = 0; \;\; h(x) = 0.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат области определения исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.

Пример 1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln\,(x-8) = 0.$$

Решение. Задача сводится к решению совокупности трех уравнений:

$$\sqrt{x+2} = 3; \quad 2^{x^2+6x+5} = 1; \;\; \ln\,(x-8) = 0.$$

Из первого уравнения находим: $x + 2 = 9$; $x_1 = 7$.

Из второго уравнения получаем: $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x_2 = -1$, $x_3 = -5$.

Из третьего уравнения находим: $x - 8 = 1$; $x_4 = 9$.

Сделаем проверку. ОДЗ исходного уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x - 8 > 0, \end{cases}$$

откуда получаем: $x > 8$.
Из найденных четырех корней — x_1, x_2, x_3, x_4 — неравенству $x > 8$ удовлетворяет лишь $x_4 = 9$. Значит, $x = 9$ — единственный корень уравнения, а остальные — являются посторонними.

Ответ: 9.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Решение. Представив слагаемое $7x$ в виде $x + 6x$, получим последовательно:

$$x^3 - x - 6x + 6 = 0;$$
$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) = 0;$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 6) = 0;$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Теперь задача сводится к решению совокупности уравнений

$$x - 1 = 0; \quad x^2 + x - 6 = 0.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = 1$; из второго — $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Поскольку все преобразования были равносильными, найденные три значения являются корнями заданного уравнения.

Ответ: 1, 2, −3.

3. Метод введения новой переменной

Этим методом мы с вами часто пользовались при решении уравнений. Суть метода проста: если уравнение $f(x) = 0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x)) = 0$, то нужно ввести новую переменную $u = g(x)$, решить уравнение $p(u) = 0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$g(x) = u_1; \quad g(x) = u_2; \ \ldots; \quad g(x) = u_n,$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — корни уравнения $p(u) = 0$.

Умение удачно ввести новую переменную приходит с опытом. Удачный выбор новой переменной делает структуру уравнения более прозрачной. Новая переменная иногда очевидна, иногда несколько завуалирована, но «ощущается», а иногда «проявляется» лишь в процессе преобразований. Примите совет: решая уравнение, не торопитесь начинать преобразования, сначала подумайте, нельзя ли записать уравнение проще, введя новую переменную. И еще: если вы ввели новую переменную, то решите полученное уравнение относительно новой переменной до конца, т. е. вплоть до проверки его корней (если это необходимо), и только потом возвращайтесь к исходной переменной.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}.$$

Решение. Введя новую переменную $u = x^2 - x$, получим существенно более простое иррациональное уравнение:

$$\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7} = \sqrt{2u + 21}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{u + 2} + \sqrt{u + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{2u + 21}\right)^2;$$

$$u + 2 + 2\sqrt{u + 2}\sqrt{u + 7} + u + 7 = 2u + 21;$$

Решите уравнение:

○24.6. а) $(2^{2x} + 16)^{20} = (10 \cdot 2^x)^{20}$;

б) $(\log_{0,1}^2 x - 2)^3 = (2\log_{0,1} x + 1)^3$.

○24.7. а) $2^{x^2+3} - 8^{x+1} = 0$; б) $27^{5-x^2} - 3^{x^3-1} = 0$.

○24.8. а) $\left(\sqrt{3}\right)^{\operatorname{tg} x} = \frac{3\sqrt{3}}{3^{\operatorname{tg} x}}$; б) $\left(\sqrt{2}\right)^{2\cos x} = \frac{1}{2 \cdot 2^{\cos x}}$.

○24.9. а) $\log_{\frac{2}{3}} (7x + 9) - \log_{\frac{2}{3}} (8 - x) = 1$;

б) $\log_{1,2} (3x - 1) + \log_{1,2} (3x + 1) = \log_{1,2} 8$.

Решите уравнение методом разложения на множители:

○24.10. а) $x^3 - 9x^2 + 20x = 0$; б) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$.

○24.11. а) $\sqrt{x^5} - 3\sqrt{x^3} - 18\sqrt{x} = 0$;

б) $\sqrt[4]{x^9} - 2\sqrt[4]{x^5} - 15\sqrt[4]{x} = 0$.

○24.12. а) $2^x \cdot x - 4x - 4 + 2^x = 0$;

б) $3^x \cdot x - 3^{x+1} + 27 = 9x$.

○24.13. а) $2x^2 \sin x - 8\sin x + 4 = x^2$;

б) $2x^2 \cos x + 9 = 18\cos x + x^2$.

○24.14. а) $\sin 2x = \sin x$; в) $\sqrt{3}\cos 3x = \sin 6x$;

б) $\cos^2 (\pi - x) + \sin 2x = 0$; г) $\sin^2\left(\pi + \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin x = 0$.

Решите уравнение методом введения новой переменной:

○24.15. а) $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$; б) $x^8 + 3x^4 - 4 = 0$.

○24.16. а) $\sqrt{x^2 + 1 - 2x} - 6\sqrt{x - 1} = 7$;

б) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 6 = 5\sqrt{2 - x}$.

○24.17. а) $\sqrt{\frac{2x+3}{2x-1}} + 4\sqrt{\frac{2x-1}{2x+3}} = 4$; б) $\sqrt{\frac{5x-1}{x+3}} + 5\sqrt{\frac{x+3}{5x-1}} = 6$.

○24.18. а) $2^x + 2^{1-x} = 3$; в) $5^x + 4 = 5^{2x+1}$;

б) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1}$; г) $3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}$.