ГЛАВА 5. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств

Изучая курс алгебры, вы постоянно решали уравнения и неравенства с одной переменной, системы уравнений с двумя переменными, системы неравенств с одной переменной. В этой главе, завершающей изучение школьного курса алгебры и начал математического анализа, мы снова обращаемся к уравнениям и неравенствам, чтобы рассмотреть их с самых общих позиций. Это будет, с одной стороны, своеобразное подведение итогов и, с другой стороны, некоторое расширение и углубление ваших знаний.

§ 23. Равносильность уравнений

В этом параграфе речь пойдет о принципиальных вопросах, связанных с решением уравнений с одной переменной: что такое равносильные уравнения; какие преобразования уравнений являются равносильными, а какие — нет; когда и как надо делать проверку найденных корней. Эти вопросы мы обсуждали в курсе алгебры начиная с 8-го класса, да и в настоящем учебнике о них уже шла речь, например, при решении показательных и логарифмических уравнений. Теперь рассмотрим эти вопросы с самых общих позиций.

> ***Определение 1.*** Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = h(x)$ называют **равносильными,** если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют *равносильными*, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня: 2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2 + 1 = 0$ и $\sqrt{x} = -3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. Если каждый корень уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \tag{2}$$

то уравнение (2) называют **следствием уравнения** (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение:

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Схему решения любого уравнения можно описать так: заданное уравнение (1) преобразуют в уравнение (2), более простое, чем уравнение (1); уравнение (2) преобразуют в уравнение (3), более простое, чем уравнение (2), и т. д.:

$$(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to \ldots .$$

В конце концов получают достаточно простое уравнение и находят его корни. В этот момент и возникает главный вопрос: совпадает ли множество найденных корней последнего уравнения с множеством корней исходного уравнения (1)? Если все преобразования были равносильными, т. е. если были равносильны уравнения (1) и (2), (2) и (3), (3) и (4) и т. д., то ответ на поставленный вопрос положителен: да, совпадает. Это значит, что решив последнее уравнение цепочки, мы тем самым решим и первое (исходное) уравнение. Если же некоторые преобразования были равносильными, а в некоторых мы не уверены, но точно знаем, что переходили с их помощью к уравнениям-следствиям, то однозначного ответа на поставленный вопрос мы не получим.

Чтобы ответ на вопрос был более определенным, нужно все найденные корни последнего уравнения цепочки *проверить*, подставив их поочередно в исходное уравнение (1). Если проверка показывает, что найденный корень последнего уравнения цепочки не удовлетворяет исходному уравнению, его называют *посторонним корнем*; естественно, что посторонние корни в ответ не включают.

Вы, конечно, понимаете, что термин «более простое уравнение», вообще говоря, не поддается точному описанию. Обычно одно уравнение считают более простым, чем другое, по чисто внешним признакам. Например, решая уравнение $2^{\sqrt{2x+7}} = 2^{x-3}$, получаем сначала $\sqrt{2x+7} = x - 3$; это иррациональное уравнение проще заданного «показательно-иррационального» уравнения. Далее возведя обе части иррационального уравнения в квадрат, получим $2x + 7 = (x - 3)^2$; это рациональное уравнение проще, чем предыдущее иррациональное уравнение.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) $\to$ (2) $\to$ (3) $\to$ (4) $\to$ ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

1. Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?

2. Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?

3. Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?

4. В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Ответу на каждый из вопросов отведен отдельный пункт данного параграфа.

1. Теоремы о равносильности уравнений

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры, основано на шести *теоремах о равносильности* (все они в той или иной мере вам известны). Первые три теоремы — «спокойные», они гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.

Теорема 1. **Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 2. **Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.**

Теорема 3. **Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

Следующие три теоремы — «беспокойные», они работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений. Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. **Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ)** называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 4. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:**

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$;

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: *если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 5. **Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n = g(x)^n$.**

Теорема 6. **Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.**

2. Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие

В этом пункте мы ответим на второй вопрос: какие преобразования переводят данное уравнение в уравнение-следствие?

Частично ответ на этот вопрос связан с тремя последними теоремами. Можно сказать так: если в процессе решения уравнения мы применили заключение одной из теорем 4, 5, 6, не проверив выполнения ограничительных условий, заложенных в формулировке теоремы, то получится уравнение-следствие. Приведем примеры.

1) Уравнение $x - 1 = 3$ имеет один корень $x = 4$. Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим уравнение $(x - 1)(x - 2) = 3(x - 2)$, имеющее два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы умножили обе части уравнения на одно и то же выражение, нарушив при этом условия теоремы 4. В этой теореме содержится требование: выражение, на которое мы умножаем обе части уравнения, нигде не должно обращаться в 0. Мы же умножили обе части уравнения на выражение $x - 2$, которое обращается в 0 при $x = 2$; именно это значение оказалось посторонним корнем.

2) Возьмем то же самое уравнение $x - 1 = 3$ и возведем обе его части в квадрат. Получим уравнение $(x - 1)^2 = 9$, имеющее два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Второй корень является посторонним для уравнения $x - 1 = 3$. Причина его появления состоит в том, что мы возвели обе части уравнения в одну и ту же четную степень, нарушив при этом условие теоремы 5. В этой теореме содержится требование: обе части уравнения должны быть неотрицательны. Относительно выражения $x - 1$ это утверждать мы не можем.

3) Рассмотрим уравнение $\ln(2x - 4) = \ln(3x - 5)$. Потенцируя, получим уравнение $2x - 4 = 3x - 5$ с единственным корнем $x = 1$. Но этот корень является посторонним для заданного логарифмического уравнения, поскольку оба выражения под знаками логарифмов при $x = 1$ принимают отрицательные значения. Причина появления постороннего корня состоит в том, что мы, потенцируя (т. е. «освобождаясь» от знаков логарифмов), нарушили условия теоремы 6. В этой теореме содержится требование: выражения под знаками логарифмов должны быть положительными; о выражениях $2x - 4$ и $3x - 5$ этого утверждать мы не можем, так как они при одних значениях x положительны, при других — отрицательны.

В последнем примере переход от логарифмического уравнения к уравнению $2x - 4 = 3x - 5$ привел к *расширению области определения уравнения*. Область определения логарифмического уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0, \end{cases}$$

решив которую находим: $x > 2$. Область же определения уравнения $2x - 4 = 3x - 5$ есть множество всех действительных чисел. По сравнению с логарифмическим уравнением она расширилась:

добавился луч $(-\infty; 2]$. Именно в эту добавленную часть и «проник» посторонний корень $x = 1$.

Перечислим возможные *причины расширения области определения уравнения*:

1) освобождение в процессе решения уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину;

2) освобождение в процессе решения уравнения от знаков корней четной степени;

3) освобождение в процессе решения уравнения от знаков логарифмов.

Подведем итоги. Исходное уравнение преобразуется в процессе решения в уравнение-следствие, а значит, *обязательна проверка всех найденных корней, если*:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (разумеется, имеющее смысл во всей области определения уравнения).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5x-6} = 5$.

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданного уравнения по схеме (1) → (2) → (3) → (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Последовательно имеем:

$$\sqrt{5x-6} = 5 - \sqrt{2x+5};$$

$$\left(\sqrt{5x-6}\right)^2 = \left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2;$$

$$5x - 6 = 25 - 10\sqrt{2x+5} + 2x + 5;$$

$$10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x;$$

$$\left(10\sqrt{2x+5}\right)^2 = (36 - 3x)^2;$$

$$100(2x + 5) = 1296 - 216x + 9x^2;$$

$$9x^2 - 416x + 796 = 0;$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{398}{9} = 44\frac{2}{9}.$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными. Замечаем, что в процессе решения уравнения дважды применялось неравносильное преобразование — возведение в квадрат; кроме того, расширилась область определения уравнения (были квадратные корни — были ограничения на переменную, не стало квадратных корней — не стало ограничений). Значит, решенное на последнем шаге первого этапа квадратное уравнение является уравнением-следствием для заданного уравнения. Проверка обязательна.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если $x = 2$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{5 \cdot 2 - 6} = 5$, т. е. $3 + 2 = 5$ — верное равенство.

Если $x = 44\frac{2}{9}$, то получаем: $\sqrt{2 \cdot 44\frac{2}{9} + 5} + \sqrt{5 \cdot 44\frac{2}{9} - 6} = 5$.

Это неверное равенство, поскольку уже первое подкоренное выражение явно больше, чем 25, и потому корень из него больше, чем 5, т. е. уже больше правой части равенства; тем более что к этому квадратному корню прибавляется еще одно положительное число. Таким образом, $x = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

3. О проверке корней

В этом пункте мы ответим на третий вопрос: как сделать проверку корней, если их подстановка в исходное уравнение сопряжена со значительными вычислительными трудностями? Видимо, в таких случаях надо искать обходные пути проверки.

Вернемся к примеру 1. Подстановка значения $x_1 = 2$ в заданное уравнение трудностей не представляла. Подстановку же второго значения $x_2 = 44\frac{2}{9}$ мы фактически заменили прикидкой. Мы прикинули, что $x_2 \approx 44$, значит, $\sqrt{2x_2 + 5} > 5$, и сразу стало ясно, что $x_2 = 44\frac{2}{9}$ — посторонний корень. Такая прикидка — один из обходных путей проверки.

Еще раз вернемся к примеру 1. Значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ можно было проверить не по исходному уравнению, а по полученному в процессе преобразований уравнению-следствию: $10\sqrt{2x + 5} = 36 - 3x$. По смыслу этого уравнения должно выполняться неравенство $36 - 3x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 12$.

Поскольку значение $x_2 = 44\frac{2}{9}$ этому условию не удовлетворяет, то x_2 — посторонний корень для уравнения $10\sqrt{2x+5} = 36 - 3x$ и тем более для исходного уравнения.

Как правило, самый легкий обходной путь проверки — по области определения (ОДЗ) заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$\ln(x+4) + \ln(2x+3) = \ln(1-2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом: «Сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4) + \ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде

$$\ln(x+4)(2x+3) = \ln(1-2x).$$

Потенцируя, получаем:

$$(x+4)(2x+3) = (1-2x);$$

$$2x^2 + 8x + 3x + 12 = 1 - 2x;$$

$$2x^2 + 13x + 11 = 0;$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = -5{,}5.$$

Второй этап. В процессе решения произошло расширение области определения уравнения, значит, проверка обязательна.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения области определения уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству; это посторонний корень.

Ответ: -1.

Замечание 1. Каждый раз выделять при решении уравнения три этапа — технический, анализ, проверку — необязательно. Но все это нужно «держать в голове» и уж во всяком случае понимать следующее: если анализ показал, что проверка обязательна, а вы ее не сделали, то уравнение не может считаться решенным верно; тем более оно не может считаться решенным верно, если вы не сделали сам анализ.

Пример 3. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Потенцируя, получаем:

$$x^2 - 1 = 5 - x;$$
$$x^2 + x - 6 = 0;$$
$$x_1 = 2, \ \ x_2 = -3.$$

Для проверки корней выпишем условия, задающие ОДЗ:

$$\begin{cases} x+4>0, \\ x+4\neq 1, \\ x^2-1>0, \\ 5-x>0. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет всем условиям этой системы, а значение $x = -3$ не удовлетворяет второму условию; следовательно, $x = -3$ — посторонний корень.

Ответ: 2.

Замечание 2. Не переоценивайте способ проверки по ОДЗ: он является полноценным только в том случае, когда при решении уравнения других причин нарушения равносильности, кроме расширения ОДЗ, не было (это чаще всего бывает в логарифмических уравнениях). При решении же иррациональных уравнений, где используется метод возведения в квадрат, способ проверки найденных корней по ОДЗ не выручит; лучше, если это возможно, делать проверку подстановкой. Так, в примере 1 ОДЗ: $x \geqslant \dfrac{6}{5}$. В эту область попадают оба найденных значения: $x_1 = 2$, $x_2 = 44\dfrac{2}{9}$. Но, как мы видели, второй корень — посторонний. Так что ОДЗ здесь не помогла.

4. О потере корней

В этом пункте мы ответим на четвертый вопрос: в каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений*:

1) деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x)) = 0$

(а не к уравнению $f(x) = g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим: $x^2 = 10^4$; $x_1 = 100$, $x_2 = -100$.

Второй способ. Имеем: $2 \lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Обратите внимание: при решении вторым способом произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2 \lg |x|$ мы воспользовались неправильной формулой $\lg x^2 = 2 \lg x$, сужающей область определения выражения: область определения выражения $\lg x^2$ задается условием $x \neq 0$ (т. е. $x < 0$ или $x > 0$), тогда как область определения выражения $2 \lg x$ задается условием $x > 0$. Область определения сузилась, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу, следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.

Есть еще одна причина, по которой может произойти потеря корней, ее мы упомянем в начале § 24.

Упражнения

23.1. Равносильно ли уравнение $2^x = 256$ уравнению:

а) $\log_2 x = 3$;

в) $3x^2 - 24x = 0$;

б) $x^2 - 9x + 8 = 0$;

г) $\frac{16}{x} = 2$?

23.2. Равносильно ли уравнение $\sin x = 0$ уравнению:

а) $\cos x = 1$;

в) $\cos 2x = 1$;

б) $\operatorname{tg} x = 0$;

г) $\sqrt{x-1} \cdot \sin x = 0$?

23.3. Придумайте три уравнения, равносильных уравнению:

а) $\sqrt{2x-1} = 3$;

в) $\lg x^2 = 4$;

б) $\cos x = 3$;

г) $x^{\frac{3}{5}} = -1$.