## Предисловие

Пособие содержит основные сведения по предмету, объем которых не составляет однако необходимого минимума знаний по теме «Теория вероятностей и математическая статистика» курса высшей математики КГСХА.

В связи с этим оно может быть рекомендовано лишь при подготовке к экзамену (после прохождения соответствующего цикла занятий в ходе семестрового обучения) в комбинации с конспектом лекций или учебником.

Пособие состоит из трех частей. В первой и второй частях содержатся сведения по теории и простейшие примеры, помогающие уяснению важнейших понятий.

В третьей части приведены образцы решения типовых задач и формулы, используемые для их решения.

# I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## Введение

Случайным событием (с.с.) называют такое событие, которое в данном испытании (т.е., при осуществлении определенных условий и действий) может произойти или не произойти.

Предмет теории вероятностей (т.в.): установление закономерностей, которым подчиняются массовые однородные случайные события.

Одной из важнейших задач т.в. является вычисление вероятностей случайных событий, т.е. количественных характеристик, определяющих возможность их осуществления.

## Случайные события

Основные определения:

Испытание: совокупность условий и действий, следствием которых является то или иное с.с.

Исход испытания: любое с.с., являющееся результатом этого испытания.

События называются несовместными, если появление одного из них, исключает появление других в данном испытании.

Полная группа событий: совокупность *всех* несовместных исходов данного испытания.

Противоположные события: два события, образующие полную группу.

Равновозможные события: события, имеющие одинаковую возможность появления.

*Пример 1.* Испытание: один выстрел по мишени. Случайные события: $A$ — попадание в мишень, $B$ — промах; они являются несовместными и противоположными, т.к. образуют полную группу.

«Классическое» определение вероятности случайного события: вероятность случайного события есть дробь, знаменатель которой — число равновозможных исходов данного предполагаемого испытания, образующих полную группу, а числитель — число исходов, в которых данное случайное событие имеет место.

*Пример 2.* Испытание: из коробки, содержащей 3 белых и 2 красных шара одинакового размера, наудачу вынимается один шар. Найти вероятность случайного события $A$: «появление красного шара».

Решение. Число исходов данного испытания, образующих полную группу, равно 5; исходы эти равновозможны (т.к. шары одного размера и отбор производится наудачу); число исходов, в которых событие $A$ имеет место равно 2.

Следовательно, вероятность события $A$: $P(A)=2/5=0{,}4$.

Относительная частота случайного события: отношение числа фактически проведенных испытаний, в которых данное случайное событие имело место, к общему числу фактически проведенных испытаний.

*Пример 3.* Испытание, состоящее в произвольном подбрасывании монеты и ее последующем падении на горизонтальную поверхность, было проведено пять раз. При этом случайное событие $A$: «падение монеты гербом вверх» произошло 3 раза.

Относительная частота события А: W(A)=3/5=0,6.

Основное свойство относительной частоты: При проведении опытов, каждый из которых содержит достаточно большое число испытаний, относительная частота некоторого случайного события от одного опыта к другому изменяется незначительно (тем меньше, чем больше число испытаний); При этом ее значения группируются около некоторого числа, равного вероятности появления этого события в одном испытании, т.е.:

$W(A) \cong P(A)$, если число испытаний достаточно велико. *

Статистическая вероятность случайного события: значение относительной частоты этого события, подсчитанной по результатам опыта, содержащего достаточно большое число испытаний.

* Строгую формулировку этого свойства дает теорема Бернулли.

*Пример 4.* В ста выстрелах по мишени «десятка» была поражена 12 раз. Относительная частота попадания в «десятку» 0,12. Статистическая вероятность этого события 0,12.

### Основные теоремы

***Теорема 1.*** Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления какого либо из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Замечание: событие, состоящее в появлении хотя бы одного из нескольких событий ($A$,$B$,…$D$), называется суммой этих событий:

$$A+B+\ldots+D$$

*Пример 5.* Вероятность при стрельбе по мишени поразить «десятку» равна 0,1; вероятность попадания в «девятку» — 0,3. Стрелок производит один выстрел. Найти вероятность того, что стрелок выбьет не менее 9-ти очков (событие $A$).

Решение. Обозначим: $B$ — попадание в «десятку», $C$ — попадание в «девятку»; события $B$ и $C$ — несовместны; событие $A$ состоит в наступлении или события $B$ или события $C$; следовательно: $A$=$B$+$C$; поэтому:

$$P(A)=P(B)+P(C)=0,1+0,3=0,4.$$

***Теорема 2.*** Теорема о полной группе событий: сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

*Пример.* В условиях примера 5 найти вероятность того, что стрелок выбьет меньше 9-ти очков (соб.$D$).

Решение. События $B$,$C$ и $D$ (или события $A$ и $D$) – образуют полную группу. Следовательно,

$$P(B)+P(C)+P(D)=1;$$

отсюда:

$$P(D)=1-P(B)-P(D)=1-P(A)=1-0,4=0,6.$$

События называются независимыми, если вероятность любого из них не зависит от предположения появились другие события или нет.

*Пример 6.* Испытание: бросание двух монет. События: появление герба на первой монете ($A$) и появление герба на второй монете ($B$) – события независимые ($P(A)=P(B)=0{,}5$).

***Теорема 3.*** Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления нескольких независимых (в совокупности) событий равна произведению вероятностей этих событий.

*Замечание:* событие, состоящее в совместном появлении нескольких событий ($A, B, \ldots D$), называется произведением этих событий: $A \cdot B \cdot \ldots \cdot D$.

*Пример 7.* Прибор состоит из трех независимых узлов, вероятности безотказной работы которых в течение некоторого периода времени равны соответственно $p_1=0{,}9$; $p_2=0{,}8$ и $p_3=0{,}7$.

Найти вероятность безотказной работы прибора в целом (соб.$A$).

Решение. Обозначим: соб.$A_1$— 1-ый узел исправен, $A_2$ — второй узел исправен, $A_3$ — третий узел исправен. Эти события — независимы;

поскольку $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, то следовательно:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

События называются зависимыми, если вероятность какого либо из них зависит от предположения произошли другие события или нет.

*Пример 8.* В коробке три белых шара и два черных. Испытание: взятие наудачу двумя лицами по одному шару. Рассмотрим события: $A$ — у первого лица черный шар; $B$ — у второго лица — черный шар. Если предположить, что произошло событие $A$, то $P_A(B) = \frac{1}{5}$; если предположить, что оно не произошло (т.е. — у первого лица – белый шар), то $P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{5}$. Если предположить, что произошло событие $B$, то $P_B(A) = \frac{1}{5}$; если оно не произошло (т.е., у второго лица – белый шар), то $P_{\bar{B}}(A) = \frac{2}{5}$. Таким образом, события $A$ и $B$ — зависимые.

*Замечание:* вероятность события ($A$), подсчитанная в предположении, что другое событие ($B$) произошло, называется условной вероятностью события $A$ и обозначается: $P_B(A)$.

***Теорема 4.*** Теорема умножения вероятностей зависимых событий: Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли.

*Пример 9*. В коробке — 10 шаров, 5 красных, 3 белых и 2 черных. Испытание: наудачу вынимается 3 шара. Найти вероятность того, что первый шар белый, второй — красный, третий — также красный (соб.$D$).

Решение. Обозначим события: $A$ — первый шар — белый, $B$ – второй – красный, $C$ – третий – красный.

События $A$, $B$ и $C$ – зависимые; событие $D$ представляет совмещение событий $A$, $B$ и $C$:

$$D = A \cdot B \cdot C; \text{D=A·B·C; следовательно:}$$

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{12}.$$

***Теорема 5.*** Если при проведении «$n$» повторных испытаний вероятность появления некоторого события одинакова в каждом из них и равна «$p$», то вероятность того, что это событие появится «$k$» раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

*Пример* – см. раздел «Типовые задачи», задача №5.

## Случайные величины

Случайная величина (с.в.): величина, которая в испытании примет одно из своих возможных значений, неизвестное заранее.

*Пример 10.* Производится три выстрела по цели. Случайная величина: «число попаданий в цель»имеет возможные значения: 0;1;2;3.

*Замечание:* Если возможные значения с.в. –отдельные изолированные числа, то такая с.в. называется дискретной. Если с.в. в испытании может принять любое числовое значение, заранее неизвестное, то такая с.в. называется непрерывной.

Закон распределения вероятностей с.в.: соответствие между ее воз можными значениями и вероятностями их появления.

Табличная форма закона распределения может быть представлена следующей таблицей.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Возможные значения с.в. ($X$) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_i$ | … | $x_n$ |
| Вероятности их появления ($p$) | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_i$ | … | $p_n$ |

Интегральная функция распределения вероятностей с.в. (функция распределения): функция $F(x)$, которая для каждого значения $x$ равна вероятности того, что в испытании эта с.в. примет значение меньше $x$.

***Теорема 6.*** Вероятность того, что случайная величина примет значение в некотором интервале равна приращению ее функции распределения на этом интервале.

*Пример.* См. раздел «Типовые задачи», задача № 7(2).

Дифференциальная функция распределения вероятностей непрерывной с.в. (плотность распределения): первая производная от функции распределения.

Математическое ожидание (м.о.) с.в., закон распределения которой имеет табличную форму: сумма произведений возможных значений с.в. на их вероятности:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

*Замечание:* Если с.в. задана плотностью распределения f(x), на интервале (a, b), то математическое ожидание определяется формулой:

$$m = \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx \ ;$$

если случайная величина может принимать любые значения, то

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \ ;$$

***Теорема 7.*** Вероятностный смысл математического ожидания с.в.: м.о. приближенно равно среднему арифметическому значений случайной величины, которые она приняла при проведении достаточно большого числа повторения испытания.

Дисперсия случайной величины – мера рассеяния (разброса) возможных значений с.в. относительно их среднего значения (т.е., м.о.) с учетом вероятностей их появления; для с.в., закон распределения которой имеет табличную форму, дисперсия:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m^2$$

*Замечание:* Если с.в. задана дифференциальной функцией $f(x)$ на интервале $(a, b)$, то дисперсия определяется формулами:

$$D = \int_a^b (x-m)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - m^2$$

Если с.в. может принимать любые значения, то:

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - m^2$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины:

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

## II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Предмет математической статистки: разработка методов сбора и обработки результатов наблюдений однородных массовых событий.

В основе математической статистики лежит *выборочный метод* — метод изучения некоторого количественного признака, принадлежащего каждому из совокупности однородных объектов (генеральной совокупности), на основании изучения совокупности случайно отобранных объектов (выборки).

При изучении данной совокупности объектов относительно некоторого признака «$x$» способом описания этой совокупности может служить *статистический ряд*: перечень значений изучаемого признака с указанием соответствующих частот (т.е., чисел, показывающих, сколько раз наблюдалось то или иное значение признака) или относительных частот.

| Значения признака (варианты) $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | …. | $x_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | …. | $n_k$ |
| Относительные частоты $w=\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | …. | $w_k$ |

*Пример 1.* Для определения числа зерен в колосе злака, было обследовано 10 колосьев; результаты обследования отражены в следующей таблице.

| № наблюдения | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество зерен | 16 | 18 | 18 | 20 | 17 | 19 | 18 | 19 | 18 | 17 |

Статистический ряд:

| $x_i$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 4 | 2 | 1 |
| $w_i$ | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0,1 |

В тех случаях, когда изучаемый признак имеет непрерывный характер (например, масса объекта, его размер и т.п.), используется статистический ряд, где вместо значений признака приводятся интервалы его значений с указанием частот ( или относительных частот) признака, входящих в данный интервал.

| интервалы $(x_i;x_{i+1})$ | $(x_1;x_2)$ | $(x_2;\ x_3)$ | …. | $(x_k;\ x_{k+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| Частоты $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | …. | $n_k$ |
| Относительные частоты $w=\dfrac{n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$ | $w_1$ | $w_2$ | …. | $w_k$ |

*Пример 2.* Обследование группы студентов для изучения признака — «масса студента», дало следующие результаты:

76,2; 82,7; 72,4; 78,0; 84,6; 71,2; 84,9; 77,1; 87,5; 76,8 (*кг*).

Для составления статистического ряда интервал значений признака, в качестве которого для удобства можно взять интервал (70;90), разобьем на четыре интервала: (70;75), (75;80), (80;85), (85;90); в первый интервал входит два значения изучаемого признака ($n_1$=2), во второй — четыре ($n_2$=4), в третий — три ($n_3$=3), в четвертый — одно значение ($n_4$=1)

$$w_1=\frac{2}{2+4+3+1}=0,2;\qquad w_2=\frac{4}{10}=0,4$$
$$w_3=0,3;\qquad\qquad w_4=0,1$$

Статистический ряд:

| $(x_i;x_{i+1})$ | (70;75) | (75;80) | (80;85) | (85;90) |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 4 | 3 | 1 |
| $w_i$ | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

Главной числовой характеристикой статистического распределения изучаемой совокупности, представленного таблицей 1, является среднее арифметическое значений признака:

«*генеральная средняя*» (если изучаемая совокупность — генеральная) или «*выборочная средняя*» ( если изучаемая совокупность является выборкой):

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

При изучении генеральной совокупности по выборке выборочная средняя служит в качестве оценки генеральной средней.

Другой числовой характеристикой статистического распределения изучаемой совокупности является дисперсия (генеральная или выборочная):

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}.$$

Величина, обозначаемая $s^2$, определяемая формулой:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B,$$

где $D_B$ — выборочная дисперсия, называется выборочной исправленной дисперсией; она служит в качестве оценки генеральной дисперсии.

*Пример 3.* В условиях примера 1 найти среднее значение изучаемого признака (среднее число зерен ) и дисперсию.

Решение:

$$\overline{x} = \frac{16 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 22 \cdot 2 + 24 \cdot 1}{1+2+4+2+1} = 20,$$

$$D = \frac{(16-20)^2 \cdot 1 + (18-20)^2 \cdot 2 + (20-20)^2 \cdot 4 + (22-20)^2 \cdot 2 + (24-20)^2 \cdot 1}{1+2+4+2+1} = 4{,}8.$$

**Числовая характеристика статистического распределения**

$\sigma = \sqrt{D}$ называется *средним квадратическим отклонением* (выборочным или генеральным).

Величина: $s = \sqrt{s^2}$ называется: «исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение»; она служит в качестве оценки генерального среднего квадратического отклонения.

## III. ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

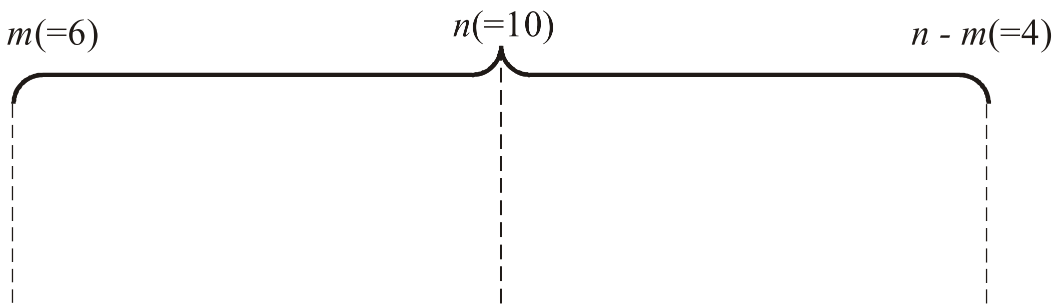
**№1.** (задача о выборке).

В коробке находится $n$(=10) шаров одинакового размера, из них — $m$(=6) — белых и $n$–$m$(=4) — черных. Наудачу извлекается $k$(=5) шаров. Найти вероятность того, что среди них будет $r$(=2) белых и $k$–$r$ (=3) — черных.

Для решения используется выведенная на основании «классического» определения вероятности формула:

$$P = \frac{C_m^r \cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$$

для запоминания которой полезна следующая схема:




Здесь $C_i^j$ — числа сочетаний; они определяются по формуле:

$$C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$$

при этом $i! = i(i-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1; \quad 0! = 1.$

$$P=\frac{C_6^2\cdot C_4^3}{C_{10}^5}=\frac{\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{41}{3!1!}}{\frac{10!}{5!54}}=\frac{5}{21}.$$

**№ 2.** Игральная кость и монета подброшены 1200 раз. Исходя из основного свойства относительной частоты определить приблизительно число появлений комбинаций «три очка — герб».

Решение: Вероятность появления указанной комбинации при одном бросании можно найти, исходя из классического определения вероятности: общее число всех равновозможных и несовместных исходов испытания «бросание кости и монеты» равно $6\cdot 3=12$ (шесть граней у кости и две стороны у монеты), из которых один исход благоприятствует интересующему нас событию ( три очка на кости и герб на монете). Поэтому, вероятность этого события равна 1/12. Тогда и относительная частота этого события будет приблизительно равна этому числу (основное свойство относительной частоты): $W={}^{m}\!/_{n}\cong p$ ,

где m – число появлений интересующего нас события, *n* — общее число проведенных испытаний (т.е. бросаний кости и монеты). Следовательно:

$${}^{m}\!/_{1200}\cong {}^{1}\!/_{12};\quad m\cong {}^{1200}\!/_{12}=100 \text{ раз.}$$

**№ 3.** В коробке — 10 шаров, из которых — 6 белых и 4 красных. Наудачу извлекается два шара. Найти вероятность того, что:

1. оба шара — белые (событие *C*);

Решение: обозначим: событие *A* — первый шар белый; событие *B* — второй шар белый; событие *C* является совмещением этих событий: $C=A\cdot B$; события *A* и *B* — зависимые; по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\left({}^{6}\!/_{10}\right)\cdot {}^{5}\!/_{9}={}^{1}\!/_{3}$$

2. шары разного цвета (т.е., один из шаров — белый, другой — красный) (событие $G$);

Решение: обозначим: событие $A$ — первый шар — белый, $Д$ — второй шар — красный; $E$ — первый шар — красный, $B$ — второй шар — белый; событие $G$ произойдет, если произойдет одно из двух несовместных событий: $AД$ или $EB$; следовательно: $G=A\cdot Д+E\cdot B$; вероятности событий $AД$ и $EB$ определяются по теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(AД) = P(A)\cdot P_A(Д) = \left(6/10\right)\cdot\left(4/9\right) = 4/15;$$

$$P(EB) = P(E)\cdot P_E(B) = \left(4/10\right)\cdot\left(6/9\right) = 4/15;$$

вероятность события $G$ по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(G) = P(AД) + P(EB) = 4/15 + 4/15 = 8/15;$$

3. хотя бы один белый шар (событие $F$);

Решение: событие, противоположное $F:\overline{F}$ — ни одного белого шара (т.е. два красных); вероятность этого события:

$$P(\overline{F}) = P(EД) = P(E)\cdot P_E(Д) = 4/10\cdot 3/9 = 2/15$$

по теореме о полной группе событий:

$P(F)+P(\overline{F})=1;$ следовательно:

$$P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 2/15 = 13/15;$$

другой вариант решения: событие $F$ произойдет, если произойдет одно из несовместных событий $C$ или $G$; т.е.: $F=C+G$; по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(F) = P(C) + P(G) = 1/3 + 8/15 = 13/15.$$

*Замечание.* Решение этой задачи может быть проведено как решение задачи о выборке; так, например, вероятность события $G$:

$$P(G) = \frac{C_6^1\cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$$

**№4.** Два стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания первым — $3/4$, вторым — $2/3$. Найти вероятность того, что:

1) попадут оба (событие $C$);

Решение: обозначим: событие $A$ — попал первый стрелок; событие $B$ — попал второй стрелок; событие $C$ является совмещением этих событий: $C=A\cdot B$; события $A$ и $B$ — независимые; по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\left(3/4\right)\cdot\left(2/3\right)=1/2;$$

2) в мишени будет одна пробоина (событие $G$);

Решение: обозначим: событие $A$ — попал первый стрелок, событие $Д$ — промахнулся второй стрелок; $E$ — промах первого стрелка, $B$ — попадание второго стрелка; событие $G$ произойдет, если произойдет одно из двух несовместных событий: $AД$ или $EB$; следовательно: $G=A\cdot Д+EB$; вероятности событий $AД$ и $EB$ определяются по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(AД)=P(A)\cdot P(Д),\quad P(EB)=P(E)\cdot P(B);\ \text{при этом}$$

$$P(Д)=P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-2/3=1/3;$$
$$P(E)=P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-3/4=1/4$$

по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(G)=P(A\cdot Д)+P(EB)=P(A)\cdot P(Д)+P(E)\cdot P(B)=$$
$$=\left(3/4\right)\cdot\left(1/3\right)+\left(1/4\right)\cdot\left(2/3\right)=5/12;$$

3) будет хотя бы одно попадание (событие $F$);

Решение: событие, противоположное $F$: $\overline{F}$ - ни одного попадания (т.е. — два промаха);

$$P(\overline{F})=P(EД)=P(E)\cdot P(Д)=\left(1/4\right)\cdot\left(1/3\right)=1/12;$$

по теореме о полной группе событий:

$$P(F)+P(\overline{F})=1;$$

следовательно:

$$P(F)=1-P(\overline{F})=1-{}^{1}\!/_{12}={}^{11}\!/_{12};$$

другой вариант решения:

событие $F=C+G$; события $C$ и $G$ — несовместны ; по теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(F)=P(C)+P(G)={}^{1}\!/_{2}+{}^{5}\!/_{12}={}^{11}\!/_{12};$$

**№5.** Стрелок производит пять выстрелов по мишени. Вероятность попадания ${}^{2}\!/_{3}$. Найти вероятность того, что будет

1) одно попадание;

Решение: выстрелы представляют собой повторные независимые испытания, что позволяет использовать формулу Бернулли:

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k};$$

$$p={}^{2}\!/_{3};\ n=5;\ \mathrm{k}=1;$$

$$P_5(1)=\frac{5!}{1!(5-1)!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-1}=\frac{10}{243};$$

2) хотя бы одно попадание (событие $A$);

Решение: событие противоположное $A$:

$\overline{A}$ — ни одного попадания (т.е., $k$=0);

$$P\left(\overline{A}\right)=P_5(0)=\frac{5!}{0!5!}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243};$$

пот теореме о полной группе событий:

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{1}{243}=\frac{242}{243}.$$

**№6.** Игральная кость брошена два раза. Составить таблицу закона распределения случайной величины «$X$»: «число выпаданий шести очков»; найти математическое ожидание и дисперсию этой с.в.

Решение: Возможные значения с.в. $X$: 0; 1; 2.

Вероятность появления возможного значения «0» (т.е. вероятность того, что при двух бросаниях шесть очков не появится ни разу) можно найти по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P_2(0) = P(A) \cdot P(B),$ где $A$ — невыпадение шести очков при первом бросании, В — невыпадение шести очков при втором бросании;

$$P(A) = P(B) = 5/6;$$

$$P_2(0) = 5/6 \cdot 5/6 = 25/36.$$

Вероятность появления возможного значения «1» можно найти по формуле Бернулли при $n$=1, $k$=1, $p = 1/6$ (вероятность появления шести очков при одном бросании):

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{18}.$$

Вероятность появления возможного значения «2»:

$P_2(2) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$ (использована теорема умножения).

Таблица закона распределения:

| X | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{25}{36}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |

Проверка: $25/36 + 5/18 + 1/36 = 1.$

Математическое ожидание с.в. X:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

Дисперсия с.в. $X$:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i = \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{25}{36} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{18} + \left(2 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{18}.$$

**№7.** Случайная величина *X*, все возможные значения которой принадлежат интервалу (–1;+3), задана на этом интервале дифференциальной функцией:

$$f(x)=\frac{3}{32}\left(3+2x-x^2\right).$$

Найти: 1) Интегральную функцию.

Решение: интегральная функция определяется по формуле:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx;$$

на интервале (–1;+3):

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{3}{32}\left(3+2x-x^2\right)dx=\frac{3}{32}\left(3x+x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{3}\right);$$

при $x<-1$ $F(x)=0$; при $x>3$ $F(x)=1$ (согласно общих свойств интегральной функции).

2) Вероятность того, что с.в. «*X*» примет значение в интервале (0;1).

Решение: вероятность того, что случайная величина, заданная интегральной функцией *F(x)*, примет значение в интервале (α;β):

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$$

(см. т.6); следовательно:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\frac{3}{32}\left(3\cdot 1+1^2-\frac{1^3}{3}+\frac{5}{3}\right)-\frac{3}{32}\left(3\cdot 0+0^2-\frac{0^3}{3}+\frac{5}{3}\right)=\frac{13}{32}$$

3) Математическое ожидание;

Решение: математическое ожидание с.в. *X*, заданной дифференциальной функцией, определяется по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot dx;$$

следовательно:

$$M(X)=\int_{-1}^{3} x\cdot\frac{3}{32}\left(3+2x-x^2\right)dx=1$$

4) Дисперсию;

Решение: для нахождения дисперсии с.в. *X*, заданной дифференциальной функцией, используется формула:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2\cdot f(x)\cdot dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-\left[M(X)\right]^2;$$

Используя второе выражение, находим:

$$D(X)=\int\limits_{-1}^{3}x^2\cdot\frac{3}{32}\left(3+2x-x^2\right)dx-1^2=0,8$$

## Список литературы


1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1977.

2. Кудрявцев В.А.,. Демидович Б.П «Краткий курс высшей математики».— М.: «Высшая школа», 1971.