1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Одна из задач интегрального исчисления состоит в отыскании первообразной и представляет собой задачу, обратную задаче отыскания производной. Например, функция $f(x)=2x$ является производной для функции $F(x)=x^2$, так как $\left(x^2\right)'=2x$. В данном случае функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Определение 1.1.. *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если на этом промежутке выполняется условие $F'(x)=f(x)$.*

Заметим, что функция $f(x)=2x$ образуется в результате дифференцирования не только функции $F(x)=x^2$, но и функций x^2+1, x^2-1, x^2+2, . . . и, вообще, любой функции вида x^2+C, где C - произвольное число. Это свойство является общим для всех первообразных.

Теорема 1.1. *Если на некотором промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C - любое число, также является первообразной для функции $f(x)$.*

Действительно, если $F'(x)=f(x)$, то (в силу того, что производная постоянной равна нулю)

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x).$$

Справедливым является и обратное утверждение, состоящее в том, что любые две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$ для функции $f(x)$ могут отличаться одна от другой только на некоторое постоянное слагаемое, т.е. если $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$, то $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C - некоторое число. Отсюда следует, что для данной функции $f(x)$ достаточно найти только одну (любую) первообразную, чтобы знать все первообразные этой функции, ибо все они отличаются друг от друга постоянными слагаемыми.

В силу этого свойства выражение $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, представляет собой общую форму записи первообразной для функции $f(x)$. Это выражение называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C, \qquad (1.1)$$

если $F'(x)=f(x)$. При этом функция $f(x)$ называется подинтегральной функцией, выражение $f(x)dx$ - подинтегральным выражением, x - переменной интегрирования. Обратим внимание на то, что подинтегральное выражение представляет собой произведение функции на дифференциал аргумента, т.е. дифференциал искомой первообразной.

Пример 1. Пусть $f(x)= x^2$. Тогда $\int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C$. В справедливости полученного решения легко убедиться с помощью обратного действия - дифференцирования: $\left(\frac{x^3}{3}+C\right)' = x^2$.

Отметим, что обозначение переменной интегрирования может быть любым. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(t)dt = F(t)+C$, соответственно, $\int f(u)du = F(u)+C$ и т.п.

<u>Свойства неопределенного интеграла</u>

Из определения неопределенного интеграла непосредственно вытекают следующие два свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = f(x)dx$,

т.е. знаки d и $\int$ взаимно уничтожаются.

2. $\int F'(x)dx = F(x)+C$ или $\int dF(x) = F(x)+C$.

Эти два свойства выражают тот факт, что операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны.

Следующие два свойства легко проверяются с помощью дифференцирования.

3. Если k - постоянная ($k \neq 0$), то

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций:

$$\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Пример 2. $\int (3x + 2x^2)dx = \int 3xdx + \int 2x^2dx = 3\int xdx + 2\int x^2dx =$

$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + C$.

§2. Таблица основных интегралов

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \qquad (m \neq -1); \tag{1.2}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C; \tag{1.3}$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \qquad \int e^u du = e^u + C; \tag{1.4}$$

$$\int \sin udu = -\cos u + C, \quad \int \cos udu = \sin u + C; \tag{1.5}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C, \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C, \tag{1.6}$$

$$\int \frac{du}{k^2 + u^2} = \frac{1}{k} arctg\frac{u}{k} + C; \tag{1.7}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{k} + C; \qquad (1.8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C. \qquad (1.9)$$

Формулы (1.2)-(1.9) легко проверяются дифференцированием правой части.

<u>Примеры непосредственного интегрирования</u>

Используя формулу (1.2) проинтегрируем степенные функции.

Пример 3. $\int dx = \int 1dx = \int x^0 dx = x + C$. (Этот же результат непосредственно следует из свойства 2).

Пример 4. $\int xdx = \int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$.

Пример 5. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$.

Пример 6. $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример 7. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

Пример 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

В примерах 9-11 помимо формулы (1.2) используем свойства 3 и 4.

Пример 9. $\int \left(1 + 2x^2\right) dx = \int dx + 2\int x^2 dx = x + \frac{2}{3}x^3 + C$.

Пример 10. $\int \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(1 + 2\sqrt{x} + x\right) dx = x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C$.

Пример 11. $\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример 12. Найти $\int 3^x\,dx$. Используем формулу (1.4). Получим

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. Используем формулу (1.8). Получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\tfrac{x}{2} + C.$$

Пример 14. Найти $\int \frac{dx}{9+x^2}$. Используя формулу (1.7) получим

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \tfrac{1}{3}\,arctg\,\tfrac{x}{3} + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

№ 1. $\int \sqrt[3]{x}dx.$ **№ 2.** $\int \sqrt[4]{x}dx.$ **№ 3.** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx.$ **№ 4.** $\int \sqrt[3]{x^4}dx.$ **№ 5.** $\int \frac{dx}{x^3}.$

№ 6. $\int \frac{dx}{x^4}.$ **№ 7.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ **№ 8.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$ **№ 9.** $\int \left(2+3x+4x^2-5x^3\right)dx$**.**

№ 10. $\int \left(x^2+x\right)^2 dx.$ **№ 11.** $\int \left(x\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}\right)dx.$ **№ 12.** $\int \frac{x+1}{x^3}dx.$ **№ 13.** $\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx.$

№ 14. $\int x\left(1+\sqrt{x}\right)dx.$ **№ 15.** $\int 5^x\,dx.$ **№ 16.** $\int \frac{dx}{4+x^2}.$ **№ 17.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}.$

Ответы: № 1. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C.$ № 2. $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+C.$ № 3. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C.$ № 4. $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$
№ 5. $-\frac{1}{2x^2}+C.$ № 6. $-\frac{1}{3x^3}+C.$ № 7. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$ № 8. $3\sqrt[3]{x}+C.$ № 9. $2x+\frac{3}{2}x^2++\frac{4}{3}x^3-$
$-\frac{5}{4}x^4+C.$ № 10. $\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}+C.$ № 11. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+C.$ № 12. $-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$ № 13.
$\frac{x^2}{2}-x+C.$ № 14. $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C.$ № 15. $\frac{5^x}{\ln 5}+C.$ № 16. $=\tfrac{1}{2}arctg\,\tfrac{x}{2}+C.$ № 17. $\arcsin\tfrac{x}{4}+C.$

§3. Метод замены переменной

Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на некотором интервале. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и интеграл $\int f(x)dx$ заменой $x=\varphi(t)$ может быть преобразован к виду

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int g(t)dt, \qquad (1.20)$$

где через $g(t)$ обозначена функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Если полученная в результате такой замены переменной функция $g(t)$ более удобна для интегрирования чем функция *f(x)*, то такая замена целесообразна.

Пример 15. Найти $\int \sin 2x dx$. Используем замену $2x = t$, откуда $x=\frac{t}{2}$, а

$\int \sin 2x dx=\int \sin t \frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int \sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$

Обычно в подобных простых случаях новую переменную не вводят, а просто подразумевают:

$$\int \sin 2x dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$$

Пример 16. $\int (x+1)^5 dx=\int (x+1)^5 d(x+1)=\frac{(x+1)^6}{6}+C.$

Пример 17. $\int \sqrt{x-1}dx=\int (x-1)^{\frac{1}{2}}d(x-1)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$

Пример 18. $\int \frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+x^4}=\frac{1}{2}arctgx^2+C.$

Пример 19. $\int \frac{dx}{x+1}=\int \frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|+C.$

Пример 20. $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx=\int \sin^2 x\cdot d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C.$

Пример 21. $\int tgx dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{d(-\cos x)}{\cos x}=-\int \frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

№ 18. $\int \frac{dx}{(x-1)^2}.$ **№ 19.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}.$ **№ 20.** $\int \frac{x^3}{1+x^8}dx.$ **№ 21.** $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx.$ **№ 22.** $\int \frac{\ln x}{x}dx.$

№ 23. $\int e^{x^2} x dx$. **№ 24.** $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$. **№ 25.** $\int \frac{x}{x^2+1} dx$. **№ 26.** $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$. **№ 27.** $\int ctg 2x dx$.

Ответы: № 18. $-\frac{1}{x-1}+C$. № 19. $2\sqrt{x+1}+C$. № 20. $\frac{1}{4} arctgx^4 + C$. № 21. $-\frac{1}{\sin x}+$ $+C$. № 22. $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$. № 23. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$. № 24. $\frac{1}{2} arctg^2 x + C$. № 25. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. № 26. $\ln(1+\sin x)+C$. № 27. $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + C$.

§4. Интегрирование по частям

Пусть даны две дифференцируемые функции $u(x)$ и $v(x)$. Дифференциал произведения этих функций

$$d(uv) = (uv)' dx = u' v dx + u v' dx$$

или

$$d(uv) = v du + u dv,$$

откуда в результате интегрирования обеих частей получим

$$uv = \int v du + \int u dv$$

и, окончательно,

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{1.21}$$

Формула (1.21) носит название *формулы интегрирования по частям.* Ее применение целесообразно в том случае, если интеграл в правой части является более простым для отыскания, чем исходный.

Пример 21. Найти интеграл $\int x e^x dx$. Воспользуемся формулой интегрирования по частям**.** Для этого выберем в качестве u функцию x: $u=x$, откуда следует $du = dx$. Тогда $e^x dx = dv$, откуда $v = e^x$. Согласно (1.21) и (1.4) получим $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

Пример 22. $\int \underset{u}{x} \underset{dv}{\cos x dx} = \int \underset{u}{x}\, d \underset{v}{\sin x} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.

Пример 23. $\int \underset{u}{\ln x} \underset{dv}{dx} = x\ln x - \int x d\ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx =$

$= x \ln x - x + C.$

Пример 24. $\int x \ln x dx = \int \underset{u}{(\ln x)} \underset{dv}{xdx} = \frac{1}{2}\int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 d\ln x =$

$=\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

Пример 25. $\int \underset{u}{arctgx} \underset{dv}{dx} = x \cdot arctgx - \int xd(arctgx) = x \cdot arctgx -$

$-\int \frac{x}{1+x^2} dx = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Формулу интегрирования по частям удобно применять для отыскания интегралов вида

$$\int x^k f(x)dx.$$

При этом следует руководствоваться следующим правилом. Если $f(x)$ относится к одной из функций: $e^{ax}, \sin ax, \cos ax$, то за u принимается степенная функция x^k. Если же $f(x)$ - одна из функций: *lnx, arctg(ax), arcctg(ax), arcsin(ax), arccos(ax),* то $x^k dx$ принимается за dv.

Задачи для самостоятельного решения

№ 28. $\int x \sin 2x dx.$ **№ 29.** $\int \sqrt{x} \ln x dx.$ **№ 30.** $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$ **№ 31.** $\int x \cdot arctg 2x dx.$

№ 32. $\int \arcsin x dx.$

Ответы: № 28. $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$ № 29. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C.$ № 30. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$ № 31. $\frac{1}{8}\left(4x^2+1\right)arctg 2x - \frac{1}{4}x + C.$ № 32. $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

§5. Интегрирование рациональных дробей

Будем называть многочленом порядка (степени) n функцию вида

$$P_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_n$ - любые постоянные числа (коэффициенты многочлена), а n - целое неотрицательное число. Отношение двух многочленов $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется рациональной дробью. Если порядок многочлена, стоящего в числителе, ниже порядка многочлена, стоящего в знаменателе (т.е $m < n$), то дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ называется правильной, в противном случае - неправильной. Например, дробь $\frac{x^2+1}{x^2}$ - неправильная, а дробь $\frac{x^2+1}{x^3}$ - правильная.

Если дробь неправильная, то разделив числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов), ее всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = N_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)},$$

где $N_{m-n}(x)$ - многочлен порядка *m-n*, а $\frac{R(x)}{P_n(x)}$ - правильная рациональная дробь. Так как интегрирование многочленов не представляет трудностей, то займемся интегрированием правильных рациональных дробей.

<u>Простейшие дроби и их интегрирование</u>

Простейшими дробями 1-го, 2-го и 3-го типов называются дроби:

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

соответственно, где *A, M, N, a, p, q* - действительные числа, *k* - натуральное число, причем предполагается, что квадратный трехчлен x^2+px+q имеет отрицательный дискриминант, т.е. $p^2-4q<0$. Интегрировать дроби 1-го и 2-го типов мы уже умеем:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Для интегрирования простейшей дроби 3-го типа выделим из квадратного трехчлена полный квадрат двучлена:

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\tfrac{p}{2}\cdot x+q+\left(\tfrac{p}{2}\right)^2-\left(\tfrac{p}{2}\right)^2=\left(x+\tfrac{p}{2}\right)^2+q-\tfrac{p^2}{4}.$$

Число $q-\frac{p^2}{4}>0$ и поэтому введем обозначение $q-\frac{p^2}{4}=a^2$. Используем подстановку $x+\frac{p}{2}=t,$ откуда $dx=dt.$ Получим

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\int\frac{Mt+N-\frac{1}{2}Mp}{t^2+a^2}dt=\int\frac{Mt}{t^2+a^2}dt+$$

$$+\int\frac{N-\frac{1}{2}Mp}{t^2+a^2}dt=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+\left(N-\tfrac{1}{2}Mp\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+$$

$$\left(N-\tfrac{1}{2}Mp\right)\tfrac{1}{a}\,arctg\,\tfrac{t}{a}+C,$$

или возвращаясь к x и подставляя вместо a его значение найдем

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

<u>Разложение правильных дробей на простейшие</u>

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби связано с разложением ее знаменателя $P_n(x)$ на множители. Каждый многочлен разлагается (и притом единственным образом) на множители вида *x-a* и x^2+px+q, причем квадратные трехчлены имеют отрицательные дискриминанты.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

1) Пусть знаменатель правильной рациональной дроби $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ имеет

только действительные простые корни, иначе говоря

$$P_n(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n),$$

где a_k - корни многочлена $P_n(x)$, причем все n корней различны ($k=$ $=1, 2, 3,...,n$). В этом случае правильная рациональная дробь разлагается на сумму n простейших дробей 1-го типа, т.е.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q(x)}{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+...+\frac{A_n}{x-a_n},$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ - некоторые числа (ниже мы рассмотрим прием для их отыскания. Таким образом, каждому корню знаменателя соответствует одно слагаемое в виде простейшей дроби 1-го типа.

2) Если в разложении знаменателя $P_n(x)$ на множители множитель *x-a* участвует k раз (k > 1), то этому множителю в разложении рациональной дроби соответсвуют k дробей, из которых одна - 1-го типа, а остальные - 2-го типа:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q(x)}{(x-a)^k(x-b)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+...+\frac{A_k}{x-a}+\frac{B}{x-b},$$

где $A_1, A_2, ... A_k, B$ - некоторые числа.

3) Квадратному трехчлену x^2+px+q в разложении знаменателя на множители соответствует в разложении рациональной дроби на сумму дробей простейшая дробь 3-го типа:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{Q(x)}{(x^2+px+q)(x-a)}=\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\frac{A}{x-a},$$

где *M,N,A* - некоторые числа.

Пример 26. Для нахождения интеграла $\int\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}dx$ разложим рациональную дробь - подинтегральную функцию - на сумму простейших: $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. Для определения коэффициентов *A* и *B* приведем правую часть к общему знаменателю. Получим

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x(A+B)+A-B}{(x-1)(x+1)},$$

откуда следует тождество

$$2x+1=x(A+B)+A-B.$$

Приравнивая коэффициенты при x в одинаковых степенях, получим систему уравнений, из которой и определяются числа A и B:

$$\begin{cases} A+B=2, \\ A-B=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A=3, \\ 2B=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2}, \\ B=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Возвращаемся к исходному интегралу: $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}dx=$

$$=\int\left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

Пример 29. Найти $\int \frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+2)}dx$. Разлагаем дробь на сумму простейших и составляем систему уравнений для нахождения коэффициентов:

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{D}{x+2}=\frac{A(x+2)+Bx(x+2)+Dx^2}{x^2(x+2)},$$

откуда следует

$$4x^2+3x+2=x^2(B+D)+x(A+2B)+2A$$

и

$$\begin{cases} B+D=4, \\ A+2B=3, \\ 2A=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=4-B, \\ B=\frac{1}{2}(3-A), \\ A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=1, \\ D=3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{3}{x+2}\right)dx=-\frac{1}{x}+\ln|x|+3\ln|x+2|+C.$$

Пример 30. Найти $\int\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$. Так как трехчлен x^2+x+1 действительных корней не имеет, то подинтегральная функция разлагается на сумму простейших дробей 1-го и 3-го типов:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}=\frac{A(x^2+x+1)+Mx(x-1)+N(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

откуда следует $2x+3=x^2(A+M)+x(A-M+N)+A-N,$ или

$$\begin{cases} A+M=0, \\ A-M+N=2, \\ A-N=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=-A, \\ 3A=5, \\ N=A-3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{3}, \\ M=-\frac{5}{3} \\ N=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx =$

$$= \int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{5x+4}{x^2+x+1}dx = \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}J,$$

где $J = \int \frac{5x+4}{x^2+x+1}dx = \int \frac{5\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{5t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{5}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} +$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{5}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\cdot arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

№ 33. $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx.$ № 34. $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}dx.$ № 35. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x}dx.$

Ответы: № 33. $\ln\left|\frac{x^2-x}{x+1}\right| + C.$ № 34. $\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C.$ № 35. $2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) +$

$+ arctgx + C$.

§6. Интегрирование иррациональных функций

Будем понимать под выражением $R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{r}{s}}\right)$ рациональную функцию, которая указывает на то, что над величинами $x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{r}{s}}$ проводятся только рациональные операции, т.е. сложение, умножение, деление и возведение <u>в целую</u> степень.

1) Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$. Обозначим через k общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{r}{s}$. Тогда подстановка $x = t^k$ позволяет выразить дробную степень x через целую степень t.

Пример 31. Найти $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$. Так как общий знаменатель дробей 1/4 и 1/2 есть число 4, то используем подстановку $x = t^4$, откуда $dx = 4t^3 dt$. Тогда

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{t}{1+t^2} 4t^3 dt = 4\int \frac{t^4}{t^2+1}dt = 4\int \frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt = 4\int \frac{t^4-1}{t^2+1}dt +$$

$$+4\int \frac{dt}{t^2+1} = 4\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1}dt + 4arctgt + C = 4\left(\frac{t^3}{3} - t + arctgt\right) + C =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} - \sqrt[4]{x} + arctg\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

2) Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[m]{ax+b}\right)dx$ подстановкой $ax + b = t^k$, где k - общий знаменатель дробей $1/n$ и $1/m$ преобразуется к интегралу от рациональной дроби.

Пример 32. Найти $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$. Используем подстановку $1 + x = t^2$, откуда $dx = 2tdt$. Получим: $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx = \int \frac{t}{t^2-1}2tdt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt =$

$$=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = 2t + 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2t + \int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2t +$$

$$\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = 2\sqrt{1+x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C.$$