ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Понятие определенного интеграла

Рассмотрим задачу о нахождении площади плоской криволинейной трапеции. Пусть ее границами являются график непрерывной функции $y=f(x)$ и отрезки прямых $y=0$ (ось абсцисс), $x=a$, $x=b$ (рис. 1).

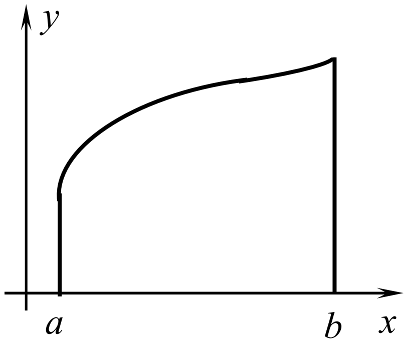

Рис. 1

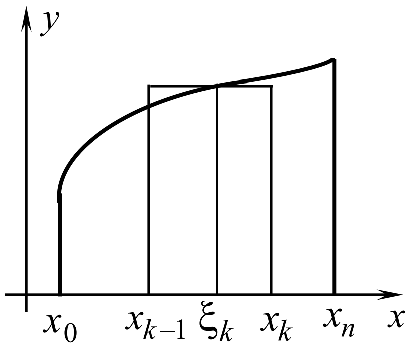

Рис. 2

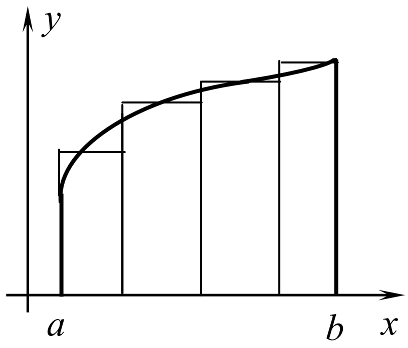

Рис. 3

Разобьем отрезок $[a,\ b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на n частичных отрезков $\left[x_{k-1}, x_k\right]$, где k=1, 2, 3,...,n. Длина k-го отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На каждом частичном отрезке произвольным образом выберем точку ξ (кси): $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Произведение $f\left(\xi_k\right) \cdot \Delta x_k$ равно площади прямоугольника с высотой $f\left(\xi_k\right)$ и основанием Δx_k (рис. 2). Сумма площадей всех прямоугольников

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\xi_k\right) \Delta x_k \tag{2.1}$$

приближенно равна площади криволинейной трапеции (рис.3). Легко видеть, что чем меньше длина каждого частичного отрезка, тем точнее сумма (2.1), называемая интегральной суммой, выражает площадь криволинейной трапеции. Отметим, что площадью криволинейной трапеции называется предел интегральной суммы (2.1) когда длины Δx_k всех частичных отрезков $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ стремятся к нулю, а число отрезков, соответственно, к бесконечности. Обозначим длину наибольшего частичного отрезка буквой λ (лямбда).

Определение 2.1. *Если предел интегральной суммы (2.1) при стремлении всех* Δx_k *к нулю существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка [a, b] на частичные отрезки, ни от выбора точек* ξ_k*, то он называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] и обозначается символом*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (2.2)$$

При этом числа *a и b называются нижним и верхним пределами интегрирования*, а *функция f(x) - интегрируемой*. На вопрос о существовании определенного интеграла отвечает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 2.1. *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.*

§2. Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл с равными нижним и верхним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции:

$$\int_a^b \left(f(x)dx + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. При перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, в этом случае соответствующие интегральные суммы отличаются по знаку, так как в одной из них все $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ положительны, а в другой все Δx_k отрицательны.

5. Определенный интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов на всех частях этого отрезка:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Если на отрезке [a, b] $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. Если M и m - наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке [a, b], то

$$m(b\text{-}a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b\text{-}a).$$

Действительно, если $f(x) \leq M$, то из свойства 6 следует

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx = M \cdot \int_a^b dx = M \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b\text{-}a),$$

т. е. получили

$$\int_a^b f(x)dx \leq M(b\text{-}a).$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b\text{-}a).$$

8. (Теорема о среднем). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке найдется точка c такая, что будет выполняться равенство:

$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b\text{-}a),$ где $a \le c \le b.$

Действительно, если $f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$, то она принимает все значения, заключенные между ее наименьшим m и наибольшим M значениями. А так как согласно свойству 7

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M,$$

то на отрезке $[a,\ b]$ найдется точка c такая, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

откуда и следует свойство 8.

Замечание. Очевидно, что от обозначения переменной интегрирования определенный интеграл зависеть не может, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz.$$

§3. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть в определенном интеграле $\int_a^b f(t)dt$, где $f(t)$ - непрерывная в соответствующем промежутке функция, нижний предел a постоянный, а верхний b может меняться. Тогда каждому численному значению b будет соответствовать определенное число, иначе говоря, интеграл в этом случае является функцией переменного верхнего предела. Если в соответствии с привычными обозначениями обозначить верхний предел буквой x, то получим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (2.3)$$

Геометрически эта функция представляет собой площадь криволинейной трапеции, правая граница которой может смещаться (рис.4).

Теорема 2.2. *Производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подинтегральной функции от значения верхнего предела, т.е. если*

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt, \quad \text{то} \quad \Phi'(x)=f(x).$$

Действительно, как видно из рис.4

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Согласно теореме о среднем (свойство 8)

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)\Delta x, \quad \text{где} \quad x\le c\le x+\Delta x,$$

следовательно, $\Delta\Phi=f(c)\Delta x$. Производная

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

ибо если $\Delta x\to 0$, то $c\to x$. Теорема доказана.

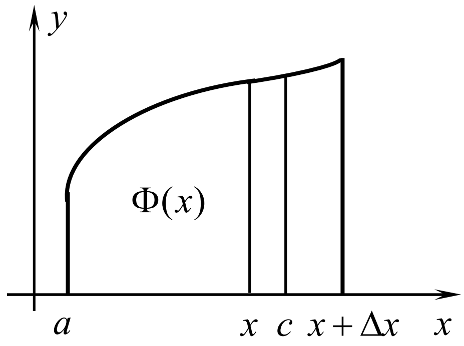

Рис.4

Таким образом, согласно теореме 2.2, функция $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных для функции *f(x)*. Учитывая, что все первообразные для данной функции могут отличаться только на постоянные слагаемые, можно написать

$$\Phi(x)=F(x)+C, \tag{2.4}$$

где *F(x)* - любая первообразная для функции *f(x)*, а *C* - соответствующая постоянная.

Положим *x=a.* Тогда из формулы (2.4), учитывая свойство 1, получим

$$\Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=F(a)+C=0, \text{ откуда } C=-F(a).$$

Теперь положим *x=b.* Из (2.4) получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

или, используя в качестве переменной интегрирования *x,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Формула (2.5) *называется формулой Ньютона-Лейбница* или основной формулой интегрального исчисления. Эта формула дает общий и практически удобный метод для вычисления определенных интегралов. Если использовать обозначение $F(b) - F(a) = F\Big|_a^b$, то (2.5) примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{2.6}$$

Пример 33. $\int_o^1 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$

Пример 34. $\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$

§4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть выполняются следующие условия: 1) функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a, b*], 2) функция $x=\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$, 3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$ Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2.7}$$

Как видно, при замене переменной в определенном интеграле можно не возвращаться к старой переменной *x,* но в этом случае следует проводить интегрирование в тех пределах, в которых изменяется новая переменная.

Пример 35. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$ Используем подстановку $x=\sin t,$ тогда $x'(t)=\cos t.$ Найдем новые пределы интегрирования: $x=0$ при $t=0$ и $x=1$ при $t=\pi/2.$ Следовательно, согласно (2.7)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\cdot dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\cdot dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{4}(2t+\sin 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

§5. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям в случае определенного интеграла принимает вид

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (2.8)$$

Пример 36. $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \int_0^{\pi} x\,d\sin x = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx = 0+\cos x\Big|_0^{\pi} =$

$= \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = -2.$

Пример 37. $\int_{-1}^{1} xe^x dx = xe^x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e+\frac{1}{e} - e^x\Big|_{-1}^{1} = e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$

§6. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на бесконечном промежутке, например, при $x \ge a.$ Тогда интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

имеет смысл при любом *b>a.* Предел этого интеграла при $b\to+\infty$ называют *несобственным интегралом функции f(x) на интервале* $[a;\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (2.9$$

В том случае, если этот предел конечен, говорят, что несобственный интеграл (2.9) сходится, в противном случае - расходится.

Пример 38. $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+1) = 1.$

Аналогичным образом определяется интеграл для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c - любое число.

Пример 39. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x_2}$. По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x_2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}(arctg0 - arctga) +$$
$$\lim_{b\to+\infty}(arctgb - arctg0) = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

§7. Вычисление площадей

Пусть плоская фигура ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, снизу кривой $y = f_1(x)$, слева и справа - отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, соответственно. В этом случае площадь S фигуры равна интегралу

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \qquad (2.10)$$

Пример 40. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (рис.5).

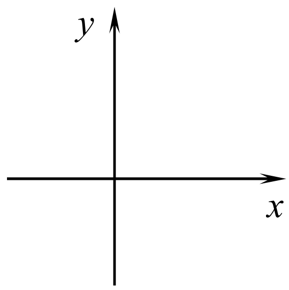

Рис. 5

Решение. Для определения границ фигуры слева и справа найдем абсциссы точек пересечения кривых: $\sqrt{x} = x^2$, откуда $x_1 = 0, x_2 = 1$. На отрезке [0;1] $\sqrt{x} > x^2$, следовательно, согласно (2.10) площадь

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

№ 41. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = x$.

№ 42. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2$ и $y = x^3$.

№ 43. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 2x$.

№ 44. Найти площадь круга радиуса *r*. (Использовать подстановку $x = r\sin t$).

№ 45. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Использовать подстановку $x = a\sin t$).

Ответы: № 41. 1/6. № 42. 1/12. № 43. 10. № 44. πr^2. № 45. πab.

§8. Вычисление объема

Поставим задачу о вычислении объема некоторого тела, заключенного между плоскостями *x=a* и *x=b*. Предположим, что нам известна площадь *S(x)* любого перпендикулярного оси Ox сечения.

Разобьем отрезок [*a; b*] точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и проведем через каждую из них плоскость, перпендикулярную оси Ox. Эти плоскости разобьют тело на *n* слоев. Объем ΔV_k *k*-го слоя приближенно равен произведению площади сечения $S(\xi_k)$ на толщину слоя Δx_k, т.е. $\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$, где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, а $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Объемом тела называется предел суммы всех ΔV_k при стремлении λ (длины наибольшего частичного отрезка) к нулю:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}S(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2.11)$$

Если функция *S(x)* непрерывна, то предел (2.11), согласно теореме 2.1, существует и равен интегралу:

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (2.12)$$

Таким образом, формула (2.12) позволяет находить объем тела по площадям его параллельных сечений.

Рассмотрим один частный случай, а именно, получим формулу для нахождения объема тела вращения. Предположим, что тело образовано вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной линиями *y=f(x), y=0, y=a, y=b*. Сечение такого тела плоскостью, перпендикулярной оси *Ox*, представляет собой круг радиуса $y=|f(x)|$. А площадь сечения, соответственно, равна $S(x)=\pi\cdot f^2(x)$. Воспользовавшись формулой (2.12) найдем объем тела вращения:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.13)$$

Пример 41. Вычислить объем шара радиуса *r*.

Решение. Шар образован вращением вокруг оси абсцисс полукруга, ограниченного линиями $x^2+y^2=r^2$ и *y=0*. Из уравнения окружности следует: $y^2=r^2-x^2$, причем $-r\le x\le r$. Согласно (2.13)

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left(r^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-r}^{r}=\pi\left(r^3+r^3-\tfrac{1}{3}r^3-\tfrac{1}{3}r^3\right)=\tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

№ 46. Найти объем параболоида, который образован вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x}, y=0, x=1$.

№ 47. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды ($y = \sin x, x = 0, x = \pi$).

№ 48. Найти объем эллипсоида вращения, т.е. тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг координатной оси.

Ответы: № 46. $\frac{\pi}{2}$. № 47. $\frac{\pi^2}{2}$. №. 48 $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$ при вращении вокруг оси *Ox,* и $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ при вращении вокруг оси *Oy*.