ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Большинство научно-технических задач не имеет аналитического решения. То есть для оценки той или иной величины нельзя получить аналитическое выражение (формулу). Только простые задачи решаются аналитически. В этом случае применяют так называемые «численные методы», которые описываются в специальных главах математики.

Для решения любой задачи необходимо выбрать математическую модель процесса, разработать алгоритм решения, реализовать его на каком-нибудь языке программирования, получить численные результаты и сделать их анализ.

Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений или других математических структур. Она может быть непрерывной или дискретной, в зависимости от описаний непрерывных или дискретных величин.

Разработка алгоритма — это поиск наилучшего метода решения задачи (многие задачи можно решить разными математическими методами). Численные методы позволяют получить решение не только в цифрах, но иногда и в аналитическом виде (в виде приближенной функции).

Одними из общих правил численных методов являются следующие: задание начальных приближений решения, выбор и реализация метода решения, получение решения с заданной точностью.

То есть, имея начальное приближение, любой численный метод начинает свой алгоритм с этого исходного состояния и затем, шаг за шагом, приближается к решению задачи, и находит его с заданной точностью.

В представленном учебно-методическом пособии отображены основные численные методы, применяемые при решении следующих задач:

– решение нелинейных уравнений с одной переменной;
– решение системы линейных уравнений;
– решение систем нелинейных уравнений;
– интерполирование функций;
– аппроксимация функций;
– поиск минимума функциий одной переменной;
– поиск минимума функций многих переменных;
– решение задач линейного программирования;
– решение дифференциальных уравнений;
– задачи математической статистики;
– решение задач с помощью рядов;
– матричное исчисление;
– вычисление производных и интегралов.

1. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Решение нелинейных уравнений с одной переменной представляет собой одну из наиболее важных задач прикладного анализа и используется в разных областях физики, механики, энергетики, техники и др.

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде

$$F(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $F(x)$ — функция, которая определена и непрерывна на бесконечном или конечном интервале $[a, b]$.

Всякое число ξ, принадлежащее отрезку $[a, b]$ и обращающее функцию $F(x)$ в ноль ($F(\xi)=0$), называется корнем уравнения (1.1).

Нелинейные уравнения с одной переменной подразделяются на алгебраические и трансцендентные. Уравнение (1.1) называется алгебраическим, если функция $F(x)$ является алгебраической. В этом случае для любого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты уравнения;
x — неизвестное;
n — степень уравнения.

Известно, что всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один вещественный или комплексный корень.

Если функция $F(x)$ не является алгебраической, то уравнение (1.1) называется трансцендентным, например: $2x–5\,tg(x) = 0$; $5^x–2\sin(x) = 0$ и т.д.

Решить нелинейное уравнение — это значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, найти значения корней с заданной точностью.

Задача численного нахождения корней уравнения состоит из двух этапов:

- отделение корней, то есть нахождение отрезка, в котором содержится корень;
- уточнение (нахождение) корня с заданной точностью.

Наиболее распространенными на практике численными методами решения уравнений с одной неизвестной являются: метод хорд, метод половинного деления, метод касательных (Ньютона), метод простой итерации.

Удачное применение того или иного метода зависит от числа корней, задания начального приближения и поведения самой функции $F(x)$.

Отделение корней во многих случаях можно произвести графически, то есть построить график и выделить участок, где $F(x)$ пересекает ось X. При этом полезно использовать математические соотношения (правила): если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $F(x)$ принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то есть произведение $F(a) \cdot F(b)<0$, то на этом отрезке есть, по меньшей мере, один корень.

Рассмотрим два метода: метод простой итерации и метод отделения корней с заданным шагом.

1.1. Метод отделения корней с заданным шагом

Будем вычислять значения функции $F(x)$, начиная с точки $x = a$ и двигаясь вправо с некоторым шагом h. Как только обнаружится пара соседних значений $F(x)$, имеющих разные знаки, то соответствующие значения x (предыдущее и последующее) можно считать концами отрезка, содержащего корень. Результатом решения являются значения функции на концах выделенных уменьшающихся отрезков (или $[a, x]$, или $[x, b]$).

Реализацию данного метода в системе Mathcad смотрите в задании 1.1. Алгоритм решения представлен на примере функции $ff(z) = z - \frac{1}{6}\cos(z) - 3$.

1.2. Метод простой итерации

Для метода простой итерации необходимо преобразовать исходное уравнение в равносильное, имеющее вид:

$$X=f(x). \qquad (1.2)$$

Пусть ξ — корень уравнения (1.2), а x_0 — начальное приближение. Подставляя x_0 в правую часть уравнения (1.2) получим:

$$x_1=f(x_0).$$

Затем подставим x_1, получим:

$$x_2=f(x_1) \text{ и т.д.}$$

Применим это соотношение шаг за шагом, т.е. корень на следующей итерации равен самой функции на предыдущей итерации:

$$x_n=f(x_{n-1}) \text{ для } n=1,2\ldots$$

Тогда получим числовую последовательность x_0, x_1, x_2, …, x_n. Предел этой последовательности является корнем уравнения (1.2):

$$\xi = \lim_{n\to\infty}(x_n).$$

Надо отметить, что построенный таким образом итерационный процесс может быть сходящимся (корень будет найден) и расходящимся (корень не будет найден).

Это зависит от самой функции и от начального приближения. Итерационный процесс можно прекратить, когда значение корня уже не уточняется с заданной точностью ε.

Реализацию данного метода в системе Mathcad смотрите далее в задании 1.2. Алгоритм решения представлен на примере функции $ff(z) = z - \frac{1}{6}\cos(z) - 3$.

1.3. Методика решения с использованием встроенных в Mathcad функций

Для решения нелинейных уравнений в системе Mathcad используются встроенная функция root и блок Given – Find.

I. Если задано уравнение f(x)=0, то его можно решить следующим образом с помощью функции root:

– задать начальное приближение $x=x_0$;

– набрать $x_1 := \mathrm{root}(f(x), x)$

$x_1 =$ (получим найденный корень x_1).

II. Если задано уравнение f(x)=0, то его можно решить следующим образом с помощью блока Given – Find:

– задать начальное приближение $x:=x_0$;

– набрать: Given

f(x)═0

x_1:=find(x)

x_1= (получим найденный корень x_1).

Если существует несколько корней, то их можно найти, меняя начальное приближение x_0 на близкое к искомому корню.

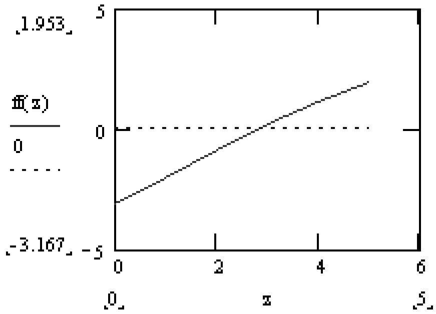
Задание 1.1.

Реализация метода отделения корней с заданным шагом в системе Mathcad. Алгоритм решения представлен на примере функции $ff(z) = z - \frac{1}{6}\cos(z) - 3$.

Зададим диапазон на отрезке [0, 5] и функцию ff(z):

$z:=0..5 \quad ff(z) := z - \frac{1}{6}\cos(z) - 3$

Получим график:



Найдем решение уравнения $z-\frac{1}{6}\cos(z)-3=0$ с помощью встроенной функции root:

z:=2

$\mathrm{root}(z-\frac{1}{6}\cos(z)-3, z) = 2.841$

Зададим отрезок [a, b] и шаг h: a:=2.8 b:=2.9 h:=0.01

Вычислим число точек n:

$n := \frac{b-a}{h}+1$ n=11.

Вычислим функцию и отрезок при начальных условиях: i:=0..n

$x_0:=a$ $y_0 := x_0-\frac{1}{6}\cos(x_0)-3$ $xxa_0:=a$ $xxb_0:=b$ $pr_0:=0$.

Итерационная формула изменения x с шагом h будет иметь вид:

$x_{i+1}:=x_i+h$ $y_{i+1} := x_{i+1}-\frac{1}{6}\cos(x_{i+1})-3$

Вычислим произведения функции pr_{i+1} на концах отрезка $[xxa_{i+1}, xxb_{i+1}]$:

$xxa_{i+1}:=x_{i+1}$ $xxb_{i+1}:=xxa_{i+1}+h$ $pr_{i+1}:=y_i \cdot y_{i+1}$.

Определим корень $kor_i := \mathrm{if}(pr_i<0, xxa_i-\frac{h}{2}, 0)$.

Получим следующие значения x_i, y_i, концов отрезка $[xxa_i, xxb_i]$, произведения pr_i и корня kor_i:

i =	x_i =	y_i =	xxa_i =	xxb_i =	pr_i =	kor_i =
0	2.8	-0.043	2.8	2.9	0	0
1	2.81	-0.032	2.81	2.82	$1.393\cdot10^{-3}$	0
2	2.82	-0.022	2.82	2.83	$7.091\cdot10^{-4}$	0
3	2.83	-0.011	2.83	2.84	$2.485\cdot10^{-4}$	0
4	2.84	$-8.559\cdot10^{-4}$	2.84	2.85	$9.722\cdot10^{-6}$	0
5	2.85	$9.631\cdot10^{-3}$	2.85	2.86	$-8.243\cdot10^{-6}$	2.845
6	2.86	0.02	2.86	2.87	$1.936\cdot10^{-4}$	0
7	2.87	0.031	2.87	2.88	$6.143\cdot10^{-4}$	0
8	2.88	0.041	2.88	2.89	$1.253\cdot10^{-3}$	0
9	2.89	0.051	2.89	2.9	$2.108\cdot10^{-3}$	0
10	2.9	0.062	2.9	2.91	$3.179\cdot10^{-3}$	0
11	2.91	0.072	2.91	2.92	$4.465\cdot10^{-3}$	0

Видим, что корень kor=2.845 получен на 5-й итерации, он близок к корню, который найден с помощью функции root. Для получения более точного значения необходимо уменьшить шаг h.

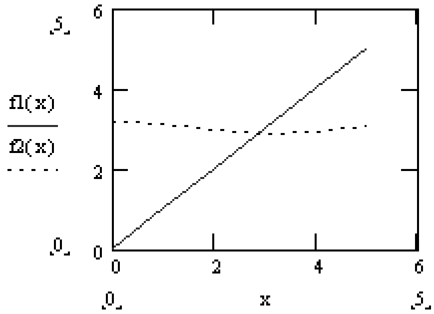
Задание 1.2.

Реализация метода простой итерации в системе Mathcad. Алгоритм решения представлен на примере функции $ff(z) = z - \frac{1}{6}\cos(z) - 3$.

Разделим уравнение на две части, приведя к виду x=f(x).

Зададим диапазон и функции f1(x) и f2(x): x:=0..5 f1(x):=x $f2(x) := \frac{1}{6}\cos(x) + 3$

Получим график:



Найдем решение с помощью встроенной функции root:
x:=1 root(f1(x)-f2(x),x)=2.84
Реализуем метод простой итерации:
m:=10 — число итераций;
i:=0..m — цикл итераций;
x_0:=1 — начальное приближение;
x_{i+1}:=f2(x_i) — итерационная формула метода простой итерации.
Результат на i-й итерации:

i =	x_i =
0	1
1	3.09
2	2.834
3	2.841
4	2.841
5	2.841
6	2.841
7	2.841
8	2.841
9	2.841
10	2.841

Видим, что корень x=2.841 получен на 3-й итерации и дальше он не уточняется.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Реализуйте оба метода (задание 1.1 и 1.2) в системе Mathcad самостоятельно для функции $ff(z) = z - a \cdot \cos(z) - b$. Значения коэффициентов a и b возьмите из таблицы 1.1 в соответствии со своим вариантом.

Таблица 1.1

Значения коэффициентов

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/4	1/	1/4	1/5	1/5	1/5	1/6	1/6	1/6
b	1	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	4

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Численные методы решения линейных алгебраических систем можно разделить на прямые (точные) и итерационные.

Прямые методы дают решения системы за конечное число арифметических операций. К ним относятся: метод Крамера, метод Гаусса, метод ортогонализации.

Итерационные методы являются приближенными. Они дают решение системы как предел последовательных приближений, вычисляемых по единообразной схеме. К ним относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксации, градиентные методы.

Систему из m линейных уравнений можно записать так:

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array} \tag{2.1}$$

или в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Решением системы (2.1) называется такая совокупность $x_1, \ldots, x_n$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Система (2.1) называется «совместной», если она имеет хотя бы одно решение, и называется «несовместной», если она не имеет решений.

Система (2.1) называется «определенной», если она имеет одно решение, и называется «неопределенной», если она имеет более одного решения.

Матрица B с добавлением столбца свободных членов называется «расширенной»:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

2.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса — это метод последовательного исключения неизвестных системы (2.1). Запишем для случая m=n:

$$\begin{array}{c} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b. \end{array} \tag{2.4}$$

Суть метода состоит в преобразовании (2.4) к системе с треугольной матрицей (прямой ход), из которой, затем, последовательно (обратным ходом) получаем все неизвестные.

Подвергнем (2.4) преобразованиям. Считая, что $a_{11}\neq 0$ (ведущий элемент), разделим на a_{11} коэффициенты первого уравнения (выполнения условия $a_{11}\neq 0$ можно добиться путем перестановки уравнений в системе).

Получим первое уравнение:

$$x_1 + a'_{12} \cdot x_2 + \cdots + a'_{1n} \cdot x_n = \beta'_1. \tag{2.5}$$

Пользуясь уравнением (2.5) исключаем неизвестное x_1 из остальных уравнений системы. Надо из каждого уравнения системы (2.4) вычесть уравнение (2.5), предварительно умноженное на соответствующий коэффициент при x_1.

Вслед за этим совершим аналогичные преобразования над остальными уравнениями и таким образом исключим неизвестные x_2, x_3, …, x_n. В результате, вместо уравнения (2.4) получаем равносильную систему с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} x_1 + a''_{12} \cdot x_2 + a''_{13} \cdot x_3 + \cdots + a''_{1n} \cdot x_n &= \beta''_1 \\ x_2 + a''_{23} \cdot x_3 + \cdots + a''_{2n} \cdot x_n &= \beta''_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{n-1} + a''_{n-1} \cdot x_n &= \beta''_{n-1} \\ x_n &= \beta''_n \end{aligned} \tag{2.6}$$

Из системы (2.6) последовательно находятся все неизвестные: x_n, x_{n-1},…, x_1. То есть в методе Гаусса два этапа: 1-й этап — это последовательное исключение неизвестных, а 2-й — нахождение неизвестных.

2.2. Метод простой итерации

Перепишем систему (2.4) в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n + \beta_1 \\ x_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n + \beta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n + \beta_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

или сокращенно:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + \beta_i \qquad (i=1\ldots n). \tag{2.8}$$

Чтобы система (2.7) имела решение, достаточно выполнения одного из следующих условий:

$$\begin{aligned} &1)\ \alpha = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| < 1 \\ &2)\ \alpha = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| < 1 \\ &3)\ \alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} < 1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Чтобы реализовать сходимость метода, нужно исходную систему преобразовать так, чтобы абсолютные величины диагональных коэффициентов были больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов.

Например, можно пересчитать коэффициенты системы (2.4):

$$B_i = \frac{\beta_i}{a_{ii}} \quad i = 1 \ldots n$$

$$A_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad i = 1 \ldots n \quad j = 1 \ldots n \tag{2.10}$$

$$A_{ii} = 0 \quad i = 1 \ldots n.$$

За начальное приближение можно взять столбец свободных членов, то есть:

$$X_0 = B_0.$$

Тогда формула метода простой итерации запишется так:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot X_j + B_i. \tag{2.11}$$

Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные элементы и вырезать из каждого уравнения неизвестные с коэффициентом равным 1, то будет получена система (2.7) у которой все $\left| a_{ij} \right| < 1$. Пример решения методом простой итерации представлен в задании 2.1.

2.3. Метод Зейделя

При решении системы (2.7) методом простой итерации каждый шаг итерационного процесса состоит в переходе от имеющегося приближения к новому. Если x_i — имеющееся, а y_i — очередное, то:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + \beta_i, \qquad i=1 \ldots n.$$

Основная идея метода Зейделя состоит в том, что на каждом шаге при вычислении y_i учитываются уже полученные значения ($y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$), то есть:

$$y_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j + \beta_1$$

$$y_2 = a_{21} \cdot y_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{2j} \cdot x_j + \beta_2$$

....

$$y_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot y_i + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \cdot x_j + \beta_i \tag{2.12}$$

$$y_n = \sum_{j=1}^{i-1} a_{nj} \cdot y_j + a_{nn} \cdot x_n + \beta_n$$

Для сходимости метода Зейделя является достаточным одно из условий (2.9). У метода Зейделя более быстрая сходимость, чем у метода простой итерации.

Для преобразования системы из (2.4) и (2.7) вычисляют:

$$C = A^T \cdot A \qquad D = A^T \cdot B.$$

Тогда получим систему:

$$C \cdot X = D.$$

Решая ее, получим итерационную формулу:

$$x_i = \sum_{i \neq j} a_{ij} \cdot x_j + \beta_i \,, \tag{2.13}$$

где $a_{ij} = -\frac{c_{ij}}{c_{ii}}$ $i \neq j$; $\beta_i = \frac{D_i}{c_{ii}}$.

2.4. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обращения матрицы

При равенстве числа уравнений и числа неизвестных (m=n) в (2.2) можно получить матричное решение (2.4).

Исходное матричное уравнение:

$$A \cdot X = B \tag{2.14}$$

Решение:

$$X = A^{-1} \cdot B \tag{2.15}$$

Здесь A^{-1} — обратная матрица к A. По определению:

$$A \cdot A^{-1} = E \,,$$

где E — диагональная единичная матрица.

Таким образом, задавшись матрицей A и вектором свободных членов B, можно получить решение согласно (2.15).

Надо отметить, что само обращение матрицы A^{-1} также требует применения одного из численных методов. В разных приложениях используются разные методы обращения квадратной матрицы.

2.5. Методика решения системы линейных уравнений с использованием встроенных в Mathcad функций

Для решения системы линейных уравнений в Mathcad можно использовать два метода: обращение матрицы и применение функции Given-Find.

1) Процедура обращения матрицы в Mathcad имеет встроенную функцию и обратная матрица записывается как A^{-1}.

Пример решения представлен далее в задании 2.1.

2) Использование блока Given-Find имеет стандартную последовательность записей:

– задаются начальные приближения неизвестным переменным

x1:= x2:= …

– служебное слово Given

– система линейных уравнений записывается через знак ═

– находится решение с помощью встроенной функции Find

Find(x1, x2, …)=

Пример решения представлен в задании 2.1.

Задание 2.1.

Пусть задана система уравнений

$121 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 5$

$9 \cdot x_1 + 145 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 = 2$

$5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 179 \cdot x_n = 3$

Ниже представлено ее решение в системе Mathcad.
Для удобства зададим, чтобы индексы массива начинались с 1:
ORIGIN:=1

Решение системы линейных уравнений матричным методом

Составим две матрицы:

$$AA := \begin{bmatrix} 121 & 3 & 4 \\ 9 & 145 & 7 \\ 5 & 8 & 179 \end{bmatrix} \qquad BB := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Найдем вектор неизвестных XX:

$$XX := AA^{-1} \cdot BB$$

$$XX = \begin{bmatrix} 0.041 \\ 0.011 \\ 0.015 \end{bmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений с пользованием блока Given-Find

Зададим начальные приближения:
x1:=1 x2:=1 x3:=1
Запишем блок:
Given
121x1 + 3x2 + 4x3 = 5
9x1 + 145x2 + 7x3 = 2
5x1 + 8x2 + 179x3 = 3
Найдем неизвестные:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(x1, x2, x3)$$

x1=0.041 x2=0.011 x3=0.015
Оба способа решения приводят к одинаковым результатам.

Метод простой итерации

Зададим n:=3 i:=1..n j:=1..n
Приведем систему к удобному виду:

$$B_i := \frac{BB_i}{AA_{i,i}}$$

$$A_{i,j} := -\frac{AA_{i,j}}{AA_{i,i}}$$

$A_{i,i}$:=0
Зададим число итераций
it:=10 p:=1..n
Зададим начальное приближение:
$X_{p,1}$:=B_p
t:=2..it m:=1..n
Наберем формулу вычисления методом простой итерации:

$$X_{m,t} := \sum_{t0=1}^{n} A_{m,t0} \cdot X_{t0,t-1} + B_m$$

t	$X_{1,t}$	$X_{2,t}$	$X_{3,t}$
2	0.04	0.01	0.015
3	0.041	0.011	0.015
4	0.041	0.011	0.015
5	0.041	0.011	0.015
6	0.041	0.011	0.015
7	0.041	0.011	0.015
8	0.041	0.011	0.015
9	0.041	0.011	0.015
10	0.041	0.011	0.015

Видно, что решение получено на третьей итерации.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Решите самостоятельно систему уравнений тремя способами. Коэффициенты возьмите из таблицы в соответствии со своим вариантом:

Вариант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	112	4	5	7	150	9	6	9	185	6	3	4
2	210	7	6	4	130	4	2	6	145	3	8	4
3	125	7	4	7	124	3	5	7	146	2	8	7
4	168	6	4	9	180	7	9	5	156	7	3	8
5	167	5	4	8	127	4	6	9	149	3	2	4
6	158	6	7	4	164	7	6	4	175	8	7	3
7	138	6	4	5	128	7	8	9	186	4	8	6
8	154	7	6	4	148	8	4	6	123	8	4	6

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система нелинейных уравнений имеет общий вид:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Рассмотрим методы решения (3.1) на примере системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

3.1. Метод простой итерации

Представим систему уравнений (3.2) в виде:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{3.3}$$

или в матричном виде:

$$x=g(x), \tag{3.4}$$

где $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Решением системы (3.2), (3.3) или (3.4) является вектор:

$$x = \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

который будучи подставлен в систему (3.2) или (3.3) обращает их в равенства.

Итерационная формула решения методом простой итерации имеет вид:

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad k=0, 1, 2, .. \tag{3.6}$$

или

$$\begin{aligned} x1_{k+1} &= g1(x1_k, x2_k) \\ x2_{k+1} &= g2(x1_k, x2_k) \end{aligned} \tag{3.7}$$

В результате получается последовательность векторов:

$$(X_k) = \begin{bmatrix} x1_k \\ x2_k \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Погрешность метода простой итерации зависит от нормы матрицы $|x_{k+1} - x_k|$ и нормы Якобиана:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g1}{\partial x1} & \frac{\partial g1}{\partial x2} \\ \frac{\partial g2}{\partial x1} & \frac{\partial g2}{\partial x2} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Если $\|J(x)\|<1$, то итерационный процесс сходится.

Опишем способ преобразования уравнений (3.2) к виду (3.3). Представим правые части уравнений (3.3) в виде:

$$\begin{cases} g1(x1, x2) = x1 + \lambda_{11} \cdot f1(x1, x2) + \lambda_{12} \cdot f2(x1, x2) \\ g2(x1, x2) = x2 + \lambda_{21} \cdot f1(x1, x2) + \lambda_{22} \cdot f2(x1, x2) \end{cases} \tag{3.10}$$

Система (3.3) равносильна системе (3.2) с правыми частями (3.10) при условии, что определитель, составленный из элементов (λ_{ij}) отличен от нуля, то есть $\lambda_{11} \cdot \lambda_{22} - \lambda_{12} \cdot \lambda_{21} \neq 0$.

Для вычисления (λ_{ij}) используют условие, что в начальной точке x_0 норма $\|J(x)\|=0$, то есть сама матрица Якоби (3.9) приравнивается к нулю.

$$J(x_0)=0$$

$$\left.\frac{\partial g1}{\partial x1}\right|_{x_0} = 0 \quad \left.\frac{\partial g1}{\partial x2}\right|_{x_0} = 0 \quad \left.\frac{\partial g2}{\partial x1}\right|_{x_0} = 0 \quad \left.\frac{\partial g2}{\partial x2}\right|_{x_0} = 0 \tag{3.11}$$

Из (3.10) с учетом (3.11) получим систему:

$$\begin{cases} 1 + \lambda_{11} \cdot \left.\dfrac{\partial f1}{\partial x1}\right|_{x_0} + \lambda_{12} \cdot \left.\dfrac{\partial f2}{\partial x1}\right|_{x_0} = 0 \\ \lambda_{11} \cdot \left.\dfrac{\partial f1}{\partial x2}\right|_{x_0} + \lambda_{12} \cdot \left.\dfrac{\partial f2}{\partial x2}\right|_{x_0} = 0 \\ \lambda_{21} \cdot \left.\dfrac{\partial f1}{\partial x1}\right|_{x_0} + \lambda_{22} \cdot \left.\dfrac{\partial f2}{\partial x1}\right|_{x_0} = 0 \\ 1 + \lambda_{21} \cdot \left.\dfrac{\partial f1}{\partial x2}\right|_{x_0} + \lambda_{22} \cdot \left.\dfrac{\partial f2}{\partial x2}\right|_{x_0} = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Из системы (3.12) можно найти неизвестные (λij):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} &= J^{-1}(x_0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{12} \end{pmatrix} &= J^{-1}(x_0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где
$$J(x_0) = \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial g1}{\partial x1}\right|_{x_0} & \left.\dfrac{\partial g1}{\partial x2}\right|_{x_0} \\ \left.\dfrac{\partial g2}{\partial x1}\right|_{x_0} & \left.\dfrac{\partial g2}{\partial x2}\right|_{x_0} \end{vmatrix}.$$

Итерационная формула метода простой итерации примет вид:

$$\begin{cases} x1_{k+1} = x1_k + \lambda_{11} \cdot f1(x1_k, x2_k) + \lambda_{12} \cdot f2(x1_k, x2_k) \\ x2_{k+1} = x2_k + \lambda_{21} \cdot f1(x1_k, x2_k) + \lambda_{22} \cdot f2(x1_k, x2_k) \end{cases} \tag{3.14, а}$$

или в матричной форме получим:

$$\begin{vmatrix} x1_{k+1} \\ x2_{k+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x1_k \\ x2_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f1(x1_k, x2_k) \\ f2(x1_k, x2_k) \end{vmatrix}. \tag{3.14, б}$$

Метод простой итерации реализован в задании 3.1.

3.2. Метод Ньютона

Запишем систему (3.1) в матричном виде:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{vmatrix}=0\,. \qquad (3.15)$$

Пусть $x1_0$, $x2_0$, …, xn_0 — начальные приближения.

$$X_0=\begin{vmatrix} x1_0 \\ x2_0 \\ ... \\ xn_0 \end{vmatrix}$$

Заменим каждое из нелинейных уравнений (3.15) линейным, полученным разложением в ряд Тейлора. Например, первое уравнение после линеаризации будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & f1(x1_0, x2_0, ..., xn_0)+\frac{\partial f1(x1_0, x2_0, ..., xn_0)}{\partial x1}\cdot(x1-x1_0)+ \\ & +\frac{\partial f1(x1_0, x2_0, ..., xn_0)}{\partial x2}\cdot(x2-x2_0)+...+\frac{\partial f1(x1_0, x2_0, ..., xn_0)}{\partial xn}\cdot(xn-xn_0). \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Запишем матрицу Якоби, то есть матрицу производных:

$$\frac{\partial F}{\partial X}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f1}{\partial x1} & \frac{\partial f1}{\partial x2} & ... & \frac{\partial f1}{\partial xn} \\ \frac{\partial f2}{\partial x1} & \frac{\partial f2}{\partial x2} & ... & \frac{\partial f2}{\partial xn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial fn}{\partial x1} & \frac{\partial fn}{\partial x2} & ... & \frac{\partial fn}{\partial xn} \end{pmatrix}. \qquad (3.17)$$

Тогда систему линеаризованных уравнений можно записать в матричном виде:

$$F(X_0)=\frac{\partial F(X_0)}{\partial X}\cdot(X-X_0)=0\,. \qquad (3.18)$$

Эта система линейна относительно поправок $\Delta x_{k,1}=x_{k,1}-x_{k,0}$.

Если матрица Якоби не вырождена, то можно найти поправки и первое приближение

$$X_1=X_0+\Delta X_1. \qquad (3.19)$$

Каждый шаг итерационного процесса состоит из решения линейной системы

$$\frac{\partial F(X_i)}{\partial X}\cdot\Delta X_{i+1}=-F(X_i)\,. \qquad (3.20)$$

и определения следующего приближения неизвестных

$$X_{i+1}=X_i+\Delta X_{i+1} \qquad .(3.21)$$

Тогда итерационный процесс в матричной форме:

$$X_{i+1}=X_i-\left|\frac{\partial F(X_i)}{\partial X}\right|^{-1}\cdot F(X_i)\,. \qquad (3.22)$$

Конец итерации наступает при обеспечении заданной точности (ε)

$$\left|X_{i+1} - X_i\right| \le \varepsilon .$$

3.3. Методика решения систем нелинейных уравнений с использованием встроенных в Mathcad функций

Для решения систем нелинейных уравнений в MathCad используется блок Given-Find. Использование блока Given-Find имеет стандартную последовательность:

– задаются функции f1(x), f2(x), …, fn(x)
– если необходимо строятся графики
– задаются начальные приближения неизвестным переменным
  $x1:=x1_0$ $x2:= x2_0$ $xn=xn_0$
– служебное слово Given
– блок нелинейных уравнений записывается через жирное равно (**=**)
– находится решение с помощью встроенной функции Find
  Find(x1, x2, …, xn)=

Если корней несколько, то задаются другие начальные приближения и расчет повторяется.
Использование встроенных функций представлено в задании 3.2.

Задание 3.1.

Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации в системе MathCad.
ORIGIN:=1
Заданные функции в системе двух нелинейных уравнений
$f1(x1,x2):=x2\cdot x1 - x2 - 1$
$f2(x1,x2):=(x1)^2 - (x2)^2 - 1$
x1:=1.5 x2:=1.5 — начальные приближения
Вычислим Якобиан A:

$$A11 := \frac{d}{dx1}f1(x1,x2) \qquad A12 := \frac{d}{dx1}f2(x1,x2)$$

$$A21 := \frac{d}{dx2}f1(x1,x2) \qquad A22 := \frac{d}{dx2}f2(x1,x2)$$

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}$$

Вычисляем вспомогательные коэффициенты L11, L12, L21, L22.

$$\begin{bmatrix} L11 \\ L12 \end{bmatrix} := A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} L21 \\ L22 \end{bmatrix} := A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Итерационные формулы.
k:=1..10

$$\begin{bmatrix} xx1_1 \\ xx2_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

— начальные приближения

Итерации:

$$\begin{bmatrix} xx1_{k+1} \\ xx2_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} xx1_k \\ xx2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L11 & L12 \\ L21 & L22 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} f1\left(xx1_k, xx2_k\right) \\ f2\left(xx1_k, xx2_k\right) \end{bmatrix}$$

$xx1_k =$	$xx2_k =$
1.5	1.5
1.708	1.375
1.719	1.395
1.717	1.396
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395

Корни x1=1.717 и x2=1.395 совпали с корнями, найденными при помощи встроенной функции Find.

Проверка равенства нулю функции:

z1:=xx110·xx210– xx210 –1   z2:=(xx110)2–(xx210)2–1

z1=7.588·10-10   z2=1.028·10-10

Задание 3.2.

Решение системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными в системе MathCad при помощи блока Given-Find.

F1(x1, x2):=x2·x1– x2– 1   F2(x1, x2):=x12– x22 –1

1-й корень

x1:=1,5 x2:=1,5

Given

$$F2(x1, x2) = 0$$

$$F1(x1, x2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} := Find(x1, x2)$$

x1=1.717   x2=1.395

Проверка равенства нулю функции:

F1(x1, x2)= –5.139·10-8

F2(x1, x2))= – 4.392·10-8

2-й корень

x1:= –1.5   x2:= –1.5

Given

$$F2(x1, x2) = 0$$

$$F1(x1, x2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix} := Find(x1, x2)$$

x1= –1.107   x2= –0.475

Проверка равенства нулю функции:

F1(x1, x2)=1.247·106

F2(x1, x2))= – 8.21·106

Задание 3.3.

Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона в системе MathCad.

ORIGIN:=1

Зададим систему из двух нелинейных уравнений

f1(x1,x2):=x2·x1– x2–1

f2(x1,x2):=(x1)2 – (x2)2–1

x1:=1.5 x2:=1.5 — начальные приближения

Вычислим Якобиан A:

$$A11 := \frac{d}{dx1} f1(x1, x2) \qquad A12 := \frac{d}{dx1} f2(x1, x2)$$

$$A21 := \frac{d}{dx2} f1(x1, x2) \qquad A22 := \frac{d}{dx2} f2(x1, x2)$$

$$A := \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}$$

$AA:=A^{-1} \quad AAT:=AA^{T}$

Итерационные формулы:

$k:=1..10$

$\begin{bmatrix} xx1_1 \\ xx2_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ — начальные приближения

Итерации:

$$\begin{bmatrix} xx1_{k+1} \\ xx2_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} xx1_k \\ xx2_k \end{bmatrix} - AAT \cdot \begin{bmatrix} f1\left(xx1_k, xx2_k\right) \\ f2\left(xx1_k, xx2_k\right) \end{bmatrix}$$

$xx1_k =$	$xx2_k =$
1.5	1.5
1.708	1.375
1.719	1.395
1.717	1.396
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395
1.717	1.395

Корни $x1=1.717$ и $x2=1.395$ совпали с корнями, найденными при помощи встроенной функции Find.

Проверка равенства нулю функции:

$z1:=xx1_5 \cdot xx2_5 - xx2_5 - 1 \qquad z2:=(xx1_5)^2 - (xx2_5)^2 - 1$

$z1= -7.519\cdot 10^{-5} \qquad z2= -1.443\cdot 10^{-4}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Решите самостоятельно систему уравнений двумя способами, постройте графики.

1. $y = \frac{1}{\left(12x^2+5\right)}$ $y = \left(6x+4\right)^2$	2. $y = \frac{1}{\left(6x+4\right)}$ $y = \exp(x-10)$	3. $y = \frac{1}{\left(5x^2-8\right)}$ $y = \exp(3x+5)$	4. $y = \frac{1}{\left(4x+3\right)}$ $y = \left(8x+12\right)^2$	5. $y = \frac{1}{\left(12x^2+5\right)}$ $y = \left(6x+4\right)^2$

6. $y=\frac{1}{(6x+4)}$ $y=\exp(x-10)$	7. $y=\frac{1}{(2x^2-4)}$ $y=tg(2x-4)$	8. $y=\frac{1}{(6x+4)}$ $y=\exp(x-10)$	9. $y=\frac{1}{(7x-12)}$ $y=(11x-12)^2$	10. $y=\frac{1}{(2x-8)}$ $y=tg(9x+12)$

4. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ТАБЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть известны значения некоторой функции f в виде таблицы:

x	x_0	x_1	…	x_n
f(x)	y_0	y_1	…	y_n

По этой исходной таблице строится приближенная функция F, которая близка к f, т.е.:

$$F(x) \approx f(x). \tag{4.1}$$

Поставим условие строгого совпадения значений f(x) и F(x) в точках x_i, i=0, 1, …, n, т.е.

$$F(x_0)=y_0,\ F(x_1)=y_1,\ \dots,\ F(x_n)=y_n. \tag{4.2}$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией. А точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ узлами интерполяции.

Есть несколько видов интерполирующих функций:

4.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Записывается в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \tag{4.3}$$

4.2. Интерполяционный многочлен Ньютона

Применяется, когда функция от x задана с постоянным шагом h.

I. Первая интерполяционная формула Ньютона

Обозначим: $t = \dfrac{x-x_0}{h}$ $\quad x=x_0+h\cdot t \quad$ $x_1=x_0+h$

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = t-2$$

$$P_n(x) = P_n(x_0+t\cdot h) = y_0 + t\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{4.4}$$

Здесь:

$\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ — разности первого, второго и т.д. n- го порядка

$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$, i=0, 1, …, n

$\Delta^2 y_i=\Delta y_{i+1}-\Delta y_i=(y_{i+2}-y_{i+1})-(y_{i+1}-y_i)=y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i$, i=0, 1, …, n

$\Delta^3 y_i=\Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i=(y_{i+3}-2y_{i+2}+y_{i+1})-(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_i$, i=0, 1, …, n и т.д.

II. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Обозначим $t=\dfrac{x-x_n}{h}$

$$P_n(x) = P_n(x_n+t\cdot h) = y_n + t\cdot\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{4.5}$$

Здесь: $\Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \dots, \Delta^n y_0$ — разности первого, второго и т.д. n- го порядка

4.3. Интерполирование сплайнами

Данный метод применяется, когда весь отрезок x велик и его разбивают на частичные отрезки.

Сплайн — это функция, которая на каждом частичном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными. Так для кубического сплайна:

$$S(x) = a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3. \qquad (4.6)$$

Можно найти неизвестные коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i из следующей системы уравнений:

$a_i = y_{i-1}$

$b_i \cdot h_i - c_i \cdot h_i^2 - d_i \cdot h_i^3 = y_i - y_{i-1}$ i=1, 2, …, n

$b_{i+1} - b_i - 2c_i \cdot h_i - 3d_i \cdot h_i^2 = 0$ i=1, 2, …, n-1

$c_{i+1} - c_i - 3d_i \cdot h_i = 0$ i=1, 2, …, n-1

$c_1 = 0$

$c_n + 3d_n \cdot b_n = 0$

Эта система состоит из (n+2(n-1)+2)=3n уравнений, из которых можно найти неизвестные a_i, b_i,, c_i, d_i.

4.4. Интерполяционный многочлен

Он имеет вид:

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n \qquad (4.7)$$

Этот многочлен имеет (n+1) коэффициент. Если составить (n+1) уравнение вида (4.2), то можно однозначно определить коэффициенты многочлена. То есть получим систему (n+1) уравнений с (n+1) неизвестными:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x_i^{n-k} = y_i \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n \qquad (4.8)$$

Решая эту систему относительно неизвестных a_0, a_1, …, a_n, получается аналитическое выражение. Система (4.8) всегда имеет единственное решение, так как ее определитель (так называемый определитель Вандермонда) отличен от нуля. То есть интерполяционный многочлен $P_n(x)$ для табличной функции (f) существует, и он единственен. Уравнения (4.8) дают правило составления матрицы Вандермонда:

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1^1 & x_1^0 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2^1 & x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n^1 & x_n^0 \end{bmatrix}$$

Нахождение интерполяционного многочлена для таблично заданной функции осуществлено в задании 4.1.

4.5. Методика интерполирования табличных функций с использованием встроенных в Mathcad функций

В математическом пакете Mathcad встроены линейная, параболическая и кубическая интерполирующие функции, которые построены на соответствующих сплайнах (lspline, pspline, cspline). Например, для интерполяции табличной функции $y_i = f(x_i)$ на отрезке (t) надо вычислить вспомогательный вектор s=lspline(x,y) при линейной интерполяции, s=pspline(x,y) при параболической интерполяции, s=cspline(x,y) при кубической интерполяции, а затем вычислить искомую интерполирующую функцию $v(t) = \mathrm{interp}(s, x, y, t)$. Кубическая интерполяция рассмотрена далее в задании 4.2.

Экстраполяция функций

Если необходимо оценить значение табличной функции за пределами заданных узловых точек, применяют те же функции, что и при интерполяции, но диапазон изменения x задают шире влево и вправо. В этом случае нахождение приближенной функции называют экстраполяцией.

В задании 4.3 рассмотрен пример нахождения экстраполирующей функции.

Задание 4.1.

Интерполирование табличной функции $y_i = f(x_i)$ с помощью полинома степени n в системе Mathcad.

ORIGIN:=1

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 24 \\ 2 \\ 8 \\ 56 \\ 23 \\ 33 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Вычислим матрицу Вандермонда (ее определитель всегда не равен нулю).

n := 7   i := 1..n   j := 1..n

$A_{i,j} := (x_i)^{n-j}$

$$A = \begin{bmatrix} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 729 & 243 & 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 4.096\cdot10^3 & 1.024\cdot10^3 & 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 1.563\cdot10^4 & 3.125\cdot10^3 & 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 4.666\cdot10^4 & 7.776\cdot10^3 & 1.296\cdot10^3 & 216 & 36 & 6 & 1 \\ 1.176\cdot10^5 & 1.681\cdot10^4 & 2.401\cdot10^3 & 343 & 49 & 7 & 1 \\ 2.621\cdot10^5 & 3.277\cdot10^4 & 4.096\cdot10^3 & 512 & 64 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Правило составления матрицы Вандермонда:

$$A1 := \begin{bmatrix} (x_1)^6 & (x_1)^5 & (x_1)^4 & (x_1)^3 & (x_1)^2 & (x_1)^1 & (x_1)^0 \\ (x_2)^6 & (x_2)^5 & (x_2)^4 & (x_2)^3 & (x_2)^2 & (x_2)^1 & (x_2)^0 \\ (x_3)^6 & (x_3)^5 & (x_3)^4 & (x_3)^3 & (x_3)^2 & (x_3)^1 & (x_3)^0 \\ (x_4)^6 & (x_4)^5 & (x_4)^4 & (x_4)^3 & (x_4)^2 & (x_4)^1 & (x_4)^0 \\ (x_5)^6 & (x_5)^5 & (x_5)^4 & (x_5)^3 & (x_5)^2 & (x_5)^1 & (x_5)^0 \\ (x_6)^6 & (x_6)^5 & (x_6)^4 & (x_6)^3 & (x_6)^2 & (x_6)^1 & (x_6)^0 \\ (x_7)^6 & (x_7)^5 & (x_7)^4 & (x_7)^3 & (x_7)^2 & (x_7)^1 & (x_7)^0 \end{bmatrix}$$

Вычисление коэффициентов полинома (z):

$z := A^{-1} \cdot y$

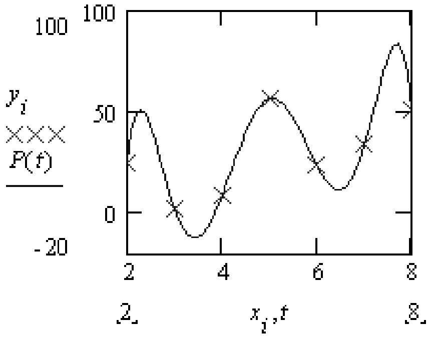
$$z = \begin{bmatrix} -1.099 \\ 32.863 \\ -393.799 \\ 2.407 \cdot 10^3 \\ -7.876 \cdot 10^3 \\ 1.301 \cdot 10^4 \\ -8.43 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Вычисление полинома на интервале t:

t:=2,2.1..8

$$P(t) := \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot t^{n-k}$$

Получим график табличной функции y=f(x) и полинома P(t):



Полином P(t) прошел через все точки.

Полученный полином имеет вид полинома шестой степени:

$P(t) = -1.009 \cdot t^6 + 32.862 \cdot t^5 - 393.799 \cdot t^4 + 2407 \cdot t^3 - 7876 \cdot t^2 + 13010 \cdot t - 8430$

Задание 4.2.

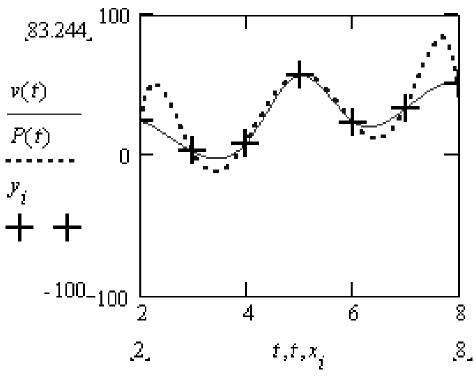
Интерполирование табличной функции $y_i = f(x_i)$ в системе Mathcad с помощью встроенных функций, на основе кубического сплайна.

t:=2,2.1..8

s:=cspline(x,y)

v(t):=interp(s,x,y,t)

Получим графики найденного полинома P(t) и кубического сплайна V(t):



Видно, что они практически совпадают.

Задание 4.3.

Экстраполяция табличной функции $y_i = f(x_i)$ в системе Mathcad с помощью встроенных функций, на основе кубического сплайна.

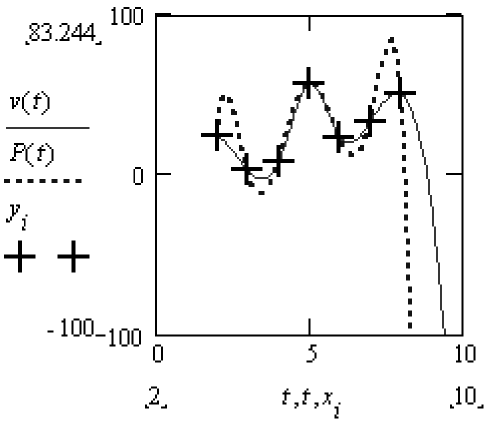
Зададим интервал для (t) больше 8.

t:=2,2.1..10

s:=cspline(x,y)

v(t):=interp(s,x,y,t)

Получим графики найденного полинома P(t) и кубического сплайна V(t):



Видно, что при экстраполяции t=8…10 функции P(t) и V(t) вне узловых точек сильно отличаются. Поэтому экстраполяцию можно делать, если заранее известен вид экстраполирующей функции (квадратичная, кубическая и т.д.), или когда диапазон экстраполяции по x очень мал.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Выполните самостоятельно интерполирование таблично заданной функции с помощью полинома степени n и с помощью встроенных в Mathcad функций, на основе кубического сплайна. Значения x_i и y_i возьмите в соответствии со своим вариантом.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	14	0	8	0	30	0	23	0	6,8	0	17	0	12,9	0	12,3
0,5	14,5	0,5	8,3	0,5	30,7	0,5	23,7	0,5	7	0,5	17,7	0,5	13,2	0,5	12,4
1	15	1	8,5	1	31,5	1	24,5	1	7,2	1	18	1	13,5	1	12,48
1,5	15,4	1,5	8,8	1,5	32	1,5	25	1,5	7,4	1,5	18,8	1,5	13,7	1,5	12,5
2	15,7	2	9	2	33	2	26	2	7,6	2	19	2	14	2	12,56
2,5	16	2,5	9,2	2,5	33,7	2,5	26,6	2,5	7,8	2,5	19,5	2,5	14,2	2,5	12,6
3	16,4	3	9,5	3	34	3	27,3	3	8	3	19,9	3	14,5	3	12,63
3,5	16,7	3,5	9,7	3,5	34,9	3,5	28	3,5	8,1	3,5	20	3,5	14,7	3,5	12,67
4	17	4	9,9	4	35,5	4	28,4	4	8,2	4	20,4	4	15	4	12,7
4,5	17,3	4,5	10	4,5	36	4,5	29	4,5	8,4	4,5	20,6	4,5	15,2	4,5	12,74
5	17,5	5	10,2	5	36,5	5	29,6	5	8,5	5	20,8	5	15,4	5	12,77
5,5	17,8	5,5	10,4	5,5	37	5,5	30	5,5	8,6	5,5	21	5,5	15,6	5,5	12,8
6	18	6	10,5	6	37,6	6	30,6	6	8,7	6	21,2	6	15,8	6	12,83
6,5	18,2	6,5	10,7	6,5	38	6,5	31	6,5	8,8	6,5	21,4	6,5	16	6,5	12,86
7	18,5	7	10,9	7	38,5	7	31,5	7	8,9	7	21,6	7	16,2	7	12,89

5. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ АППРОКСИМАЦИЯ ТАБЛИЧНЫХ ДАННЫХ

Часто в результате эксперимента и измерения каких-либо величин получают таблицу (табличную функцию) данных. Необходимо найти формулу, выражающую их зависимость аналитически. При этом найденная функция должна пройти не через все точки, как при интерполяции, а с наименьшим расстоянием до всех точек, потому что разброс этих точек получен в качестве погрешности эксперимента и измерений. То есть, надо получить приближающую функцию. При этом можно задать один из видов приближающей функции заранее: линейная, квадратичная, степенная, показательная, дробно-линейная, логарифмическая, гиперболическая, дробно-рациональная и др.

Пусть задана таблица

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Будем искать приближающуюся функцию в виде:

$$y=F(x) \tag{5.1}$$

Эта функция в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает значения как можно ближе к табличным $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Она сглаживает результаты измерений.

Пусть приближающаяся функция (F) в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет значения $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$. Требование близости табличных значений $y_1, y_2, \ldots y_n$ и значений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ достигается минимизацией суммы квадратов разностей, то есть:

$$\left(y_1-\overline{y}_1\right)^2+\left(y_2-\overline{y}_2\right)^2+\ldots+\left(y_n-\overline{y}_n\right)^2 \to \min. \tag{5.2}$$

Это приближение носит название метода наименьших квадратов.

В качестве приближающих функций часто используют следующие:

$y = a\cdot x+b$ — линейная;

$y = a\cdot x^2+bx+c$ — квадратичная;

$y = a\cdot x^m$ — степенная;

$y = a\cdot\exp(m\cdot x)$ — показательная;

$y = \dfrac{1}{a\cdot x+b}$ — дробно-линейная;

$y = a\cdot\ln(x)+b$ — логарифмическая;

$y = a\dfrac{1}{x}+b$ — гиперболическая;

$y = \dfrac{x}{a\cdot x+b}$ — дробно-рациональная.

Задача сводится к нахождению коэффициентов a, b, c, m для функции выбранного вида.

Метод наименьших квадратов (на примере трех коэффициентов a, b, c) заключается в следующем.

Пусть функция имеет вид

$$Y=F(x, a, b, c). \tag{5.3}$$

Запишем сумму квадратов разностей (5.2):

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-F(x_i, a, b, c)\right]^2=\Phi(a, b, c). \tag{5.4}$$

Для нахождения минимума отклонений Φ(a, b, c) возьмем частные производные по параметрам a, b и c и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a}=0 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial b}=0 \quad \frac{\partial\Phi}{\partial c}=0 \tag{5.5}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_a(x_i, a, b, c) = 0\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_b(x_i, a, b, c) = 0 \qquad (5.6)\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_c(x_i, a, b, c) = 0 \qquad i=1\ldots n
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (5.6) относительно искомых a, b, c, получим конкретную функцию F(x, a, b, c).

Наиболее часто в качестве приближающей функции выбирают линейную или квадратичную. Найдем их параметры.

5.1. Линейное приближение

Будем искать приближающую функцию в виде

$$F(x, a, b)=a\cdot x+b. \qquad (5.7)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 1. \qquad (5.8)$$

Составим систему вида (5.6):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\cdot x_i - b)\cdot x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\cdot x_i - b)\cdot 1 = 0.
\end{aligned} \qquad (5.9)$$

Преобразуем систему (5.9):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i - a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = 0\\
&\sum_{i=1}^{n} y_i - a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i - b\cdot n = 0.
\end{aligned} \qquad (5.10)$$

Поделим оба уравнения (5.10) на n и преобразуем. Получим:

$$\begin{aligned}
&M_{x^2}\cdot a + M_x\cdot b = M_{xy}\\
&M_x\cdot a + b = M_y,
\end{aligned} \qquad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned}
&M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad M_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\\
&M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i \qquad M_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2
\end{aligned} \qquad (5.12)$$

Запишем систему (5.11) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} M_{x^2} & M_x \\ M_x & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{xy} \\ M_y \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

Обозначим:

$$M = \begin{bmatrix} M_{x^2} & M_x \\ M_x & 1 \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{xy} \\ M_y \end{bmatrix} \qquad (5.14)$$

Тогда из системы (5.13) с учетом обозначений (5.14) получим решение:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot M_0. \qquad (5.15)$$

Из формулы (5.15) определяют искомые параметры (a, b) линейной функции F(x, a, b)=a·x+b.

Далее в задании 5.1.1 приведен пример нахождения линейного приближения функции.

5.2. Квадратичное приближение

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, b, c) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c. \qquad (5.16)$$

Найдем производные:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2 \quad \frac{\partial F}{\partial b} = x \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 1 \qquad (5.17)$$

Составим систему вида (5.6):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot x_i^2 = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot x_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c) \cdot 1 = 0 \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Преобразуем (5.18) аналогично (5.10)-(5.15), тогда получим три уравнения:

$$\begin{aligned} &M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c = M_{x^2 y} \\ &M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_x \cdot c = M_{xy} \\ &M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b + c = M_y, \end{aligned} \qquad (5.19)$$

где

$$\begin{aligned} &M_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad M_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad M_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ &M_{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad M_{x^4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \qquad M_{x^3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ &M_{x^2 y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i \end{aligned} \qquad (5.20)$$

Запишем систему (5.19) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} M_{x^4} & M_{x^3} & M_{x^2} \\ M_{x^3} & M_{x^2} & M_x \\ M_{x^2} & M_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{x^2 y} \\ M_{xy} \\ M_y \end{bmatrix}. \qquad (5.21)$$

Обозначим:

$$M = \begin{bmatrix} M_{x^4} & M_{x^3} & M_{x^2} \\ M_{x^3} & M_{x^2} & M_x \\ M_{x^2} & M_x & 1 \end{bmatrix} \quad M_0 = \begin{bmatrix} M_{x^2 y} \\ M_{xy} \\ M_y \end{bmatrix}. \qquad (5.22)$$

Тогда из системы (5.21) с учетом обозначений (5.22) получим решение:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot M_0 . \qquad (5.23)$$

Из формулы (5.23) определяют искомые параметры a, b, c квадратичной функции:

$$F(x, a, b, c) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

В задании 5.2 приведен пример нахождения квадратичного приближения функции.

5.3. Методика аппроксимации с использованием встроенных в Mathcad функций

Если приближающая функция для таблично заданных x_i и y_i является линейной, то есть $F(x)=a \cdot x+b$, то для нахождения коэффициентов a и b в Mathcad предусмотрены две функции: slope(x, y) — для нахождения a и intersept(x, y) — для нахождения b. Подробнее, как использовать данные функции, описано далее в задании 5.1.2.

Если приближающая функция является полиномом k-й степени, то для нахождения его коэффициентов в Mathcad можно использовать функцию Regress(x, y, k). Эта функция вычисляет полином порядка k, который наилучшим образом приближает данные x и y.

Например, для квадратичной функции $F(x, a, b, c)=a \cdot x^2+b \cdot x+c$, k=2, и результат вычисления функции будет иметь вид столбца:

$$kk2 = \begin{bmatrix} kk2_1 \\ kk2_2 \\ kk2_3 \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix},$$

то есть искомые коэффициенты a, b, c считаются от конца вектора. Их можно выделить с помощью функции submatrix(A, in, ik, jn, jk),

где A — исходная матрица (в данном случае A=kk2);

in — начальный номер строки выделения, т.е. номер строки, в которой находится первый коэффициент in=last(kk2);

ik — конечный номер строки выделения, т.е номер строки, в которой находится последний коэффициент ik=4;

jn — начальный номер столбца выделения, т.е. номер столбца, в котором находится первый коэффициент jn=1;

jk — конечный номер столбца выделения, т.е номер столбца, в котором находится последний коэффициент jk=1.

Подробнее, как использовать данные функции, описано далее в задании 5.2.2.

Если приближающая функция является кубической, то есть $F(x, a, b, c, d) = a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d$, то для нахождения коэффициентов a, b, c, d в Mathcad можно тоже использовать функцию Regress(x, y, k). Для кубической функции k=3. Результат выполнения функции будет иметь вид столбца:

$$kk3 = \begin{bmatrix} kk3_1 \\ kk3_2 \\ kk3_3 \\ d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

Необходимые коэффициенты можно также выделить с помощью функции submatrix(A, in, ik, jn, jk). Пример приведен далее в задании 5.2.2.

Задание 5.1.1.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде линейной функции F(t)=ax+b с помощью метода наименьших квадратов в системе Mathcad.

Для удобства зададим, чтобы индексы массива начинались с 1:

ORIGIN:=1

n:=10 — число точек

Зададим массивы x_i и y_i:

$$x := \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.69 \\ 0.71 \\ 0.62 \\ 0.51 \\ 0.47 \\ 0.24 \\ 0.07 \\ -0.07 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

Вычислим коэффициенты матриц:

$$mx := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad my := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$mxy := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad mx2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$$

Тогда матрицы M и MO будут иметь вид:

$$M := \begin{bmatrix} mx2 & mx \\ mx & 1 \end{bmatrix} \qquad MO := \begin{bmatrix} mxy \\ my \end{bmatrix}$$

Получим искомые коэффициенты a и b:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := M^{-1} \cdot MO$$

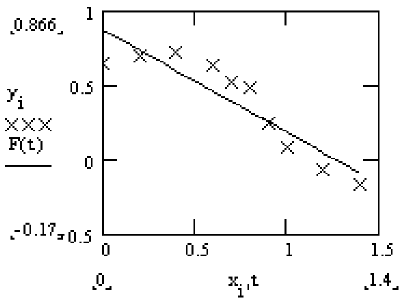
a = –0.688 b = 0.866

Зададим интервал и функцию:

i:=1..n t:=0,0.1..1.4

F(t):=a·t+b

Получим график функции F(t):



Линейная функция F(t) прошла с наименьшими расстояниями от точек (xi, yi).

Отклонение линейной функции: $E1 := \sum_{i-1}^{n} (y_i - F(x_i))^2$

E1=0.163

Задание 5.1.2.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде линейной функции F(t)=ax+b в системе Mathcad с помощью встроенных функций slope(x, y) и intersept(x, y).

a1:=slope(x, y) b1:=intercept(x, y)

a1= –0.688 b1 = 0.866

Значения a1 и b1 полностью совпали со значениями a и b, найденными в задании 5.1.1.

Задание 5.1.3.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде линейной функции F(t)=ax+b в системе Mathcad с помощью встроенных функций.

k:=1

kk:=regress(x, y, k)

$$kk = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.866 \\ -0.688 \end{bmatrix}$$

k1:=submutrix(kk, last(kk), 4, 1, 1)

$$k1 = \begin{bmatrix} -0.688 \\ 0.866 \end{bmatrix}$$

Полученные значения полностью совпали со значениями a и b, найденными в предыдущих заданиях.

Задание 5.2.1.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде квадратичной функции $F(t)=ax^2+bx+c$ с помощью метода наименьших квадратов в системе Mathcad.

Для удобства зададим, чтобы индексы массива начинались с 1:

ORIGIN:=1

n:=10 — число точек

Таблично заданные x_i и y_i:

$$x := \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.69 \\ 0.71 \\ 0.62 \\ 0.51 \\ 0.47 \\ 0.24 \\ 0.07 \\ -0.07 \\ -0.17 \end{bmatrix}$$

Вычислим коэффициенты матриц:

$$mx := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad my := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad mx4 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^4$$

$$mxy := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad mx2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \quad mx3 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^3 \quad mx2y := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot y_i$$

Тогда матрицы М и МО будут иметь вид:

$$M := \begin{bmatrix} mx4 & mx3 & mx2 \\ mx3 & mx2 & mx \\ mx2 & mx & 1 \end{bmatrix} \quad MO := \begin{bmatrix} mx2y \\ mxy \\ my \end{bmatrix}$$

Находим необходимые коэффициенты a, b и c:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := M^{-1} \cdot MO$$

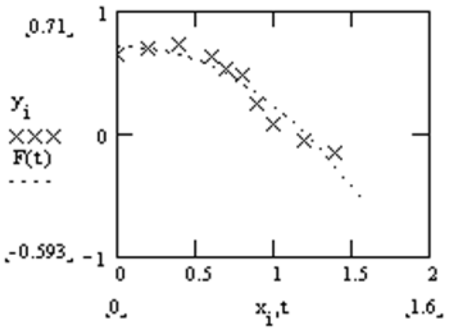
a= –0.551 b=0.076 c=0.697

Зададим интервал и функцию:

i:=1..n t:=0,0.1..1.6

$F(t):=a \cdot t^2+b \cdot t+c$

Получим график функции F(t):



Квадратичная функция F(t) прошла с наименьшими расстояниями до точек (x_i, y_i).

Отклонение квадратичной функции: $E2 := \sum_{i-1}^{n} (y_i - F(x_i))^2$

E2=0.064

Задание 5.2.2.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде квадратичной функции $F(t)=ax^2+bx+c$ в системе Mathcad с помощью встроенных функций regress(x, y, k) и submatrix(A, in, ik, jn, jk).

k:=2 kk2:=regress(x, y, k)

$$kk2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 0.697 \\ 0.076 \\ -0.551 \end{bmatrix}$$

k2:=submatrix(kk2, last(kk2), 4, 1, 1)

$$k2 = \begin{bmatrix} -0.551 \\ 0.076 \\ 0.697 \end{bmatrix}$$

a1 = –0.551 b1 = 0.076 c1 = 0.697

Значения a1, b1, c1 полностью совпали со значениями a, b, c найденными в задании 5.2.1.

Задание 5.2.3.

Нахождение приближающей функции для таблично заданных x_i и y_i в виде кубической функции $F(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ в системе Mathcad с помощью встроенных функций regress(x, y, k) и submatrix(A, in, ik, jn, jk).

k:=3 kk3:=regress(x, y, k)

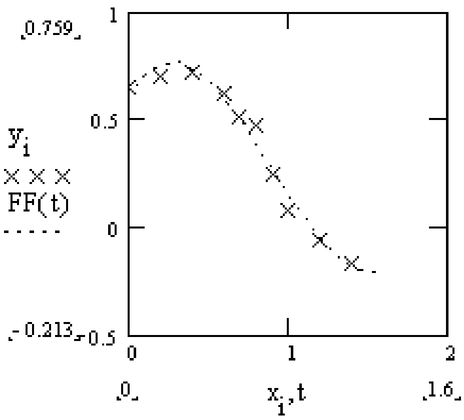
$$kk3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0.606 \\ 1.226 \\ -2.691 \\ 1.006 \end{bmatrix}$$

k3:=submatrix(kk3, last(kk3), 4, 1, 1)

$$k3 = \begin{bmatrix} 1.006 \\ -2.691 \\ 1.226 \\ 0.606 \end{bmatrix}$$

Построим график получившейся кубической функции FF(t):

$FF(t):=k3_1\cdot t^3+k3_2\cdot t^2+k3_3\cdot t+k3$



Отклонение кубической функции: $E3 := \sum_{i-1}^{n} \left(y_i - FF(x_i)\right)^2$

E3 = 0.022

Видно, что кубическая функция имеет меньше отклонение, чем линейная и квадратичная.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Выполните самостоятельно аппроксимацию таблично заданной функции с помощью метода наименьших квадратов и с помощью встроенных в Mathcad функций. В качестве приближающих функций используйте линейную и квадратичную функции. Значения x_i и y_i возьмите в соответствии со своим вариантом.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1,4	6	1,4	-1	1,4	-5	1,4	0	1,4	9	1,4	16	1,4	36	1,4	0
1,6	8	1,6	1	1,6	-4	1,6	3	1,6	11	1,6	21	1,6	43	1,6	6,5
1,8	11	1,8	3	1,8	-3	1,8	6	1,8	14	1,8	26	1,8	48	1,8	12
2	13	2	4	2	-1	2	10	2	18	2	31,5	2	56,5	2	20,5
2,2	16	2,2	6	2,2	1	2,2	15	2,2	20	2,2	36	2,2	64	2,2	28
2,4	19	2,4	8	2,4	4	2,4	20	2,4	24	2,4	42	2,4	73	2,4	37
2,6	22	2,6	10	2,6	6	2,6	25	2,6	28	2,6	49	2,6	83,5	2,6	47,5
2,8	26	2,8	12	2,8	9	2,8	32	2,8	32	2,8	55	2,8	93	2,8	57
3	29	3	14	3	13	3	39	3	37	3	62,5	3	105,5	3	69,5
3,2	33	3,2	17	3,2	17	3,2	47	3,2	42	3,2	69	3,2	117	3,2	81
3,4	37	3,4	19	3,4	21	3,4	55	3,4	47	3,4	77	3,4	130	3,4	94
3,6	41	3,6	21	3,6	26	3,6	64	3,6	53	3,6	84	3,6	144,5	3,6	108,5
3,8	47	3,8	24	3,8	31	3,8	74	3,8	59	3,8	93	3,8	158	3,8	122
4	52	4	26	4	37	4	84	4	65	4	100,5	4	174,5	4	138,5
4,2	57	4,2	29	4,2	43	4,2	95	4,2	72	4,2	110	4,2	190	4,2	154

6. ПОИСК МИНИМУМА (МАКСИМУМА) ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть задана функция y=f(x), имеющая экстремум (минимум или максимум). Запись задачи поиска минимума выглядит так:

$$f(x)\rightarrow \min,\ x\in R, \tag{6.1}$$

где R — допустимая область.

Если нужно найти максимум, то можно изменить знак функции и искать минимум y = –f(x). Функция f(x) называется унимодельной (имеет один минимум) на отрезке [a, b] если:

1) точка X_{min} локального минимума принадлежит отрезку [a, b];

2) для любых двух точек отрезка x_1 и x_2, взятых по одну сторону от точки минимума справедливо (рисунок 6.1, 6.2):

$$f(x_1)<f(x_2) \text{ как при } X_{min}<x_1<x_2, \text{ так и при } x_2<x_1< X_{min}. \tag{6.2}$$

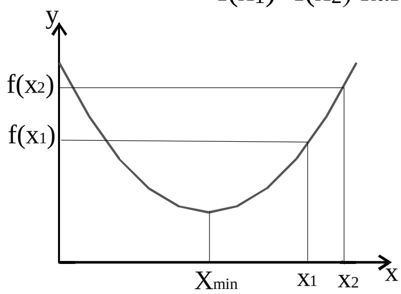


Рис. 6.1. $f(x_1)<f(x_2)$ при $X_{min}<x_1<x_2$

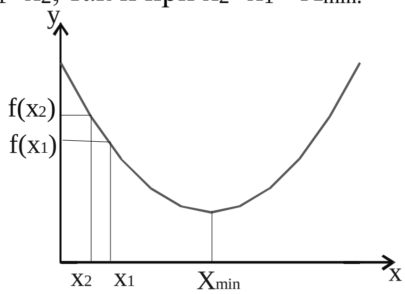


Рис. 6.2. $f(x_1)<f(x_2)$ при $x_2<x_1<X_{min}$

Для решения задачи сначала надо найти отрезок [a, b], где функция унимодельна, а затем найти X_{min} на этом отрезке с заданной точность ε.

Есть много методов поиска минимума функции: метод перебора, метод половинного деления отрезка; метод сканирования; градиентные методы; методы, использующие условие равенства нулю производной в точке минимума.

1. При использовании метода перебора вычисляются все значения y_i в точках и выбираются y_{min} и x_{min}.

2. Метод половинного деления сужает исходный отрезок [a, b] относительно его середины до тех пор, пока его пределы не станут равны X_{min} с заданной точностью ε:

$$X_{min}\approx a_{ni}\approx b_{ni}; \qquad (X_{min}- a_{ni}) \le \varepsilon. \tag{6.3}$$

3. Метод сканирования использует для вычисления функции y = f(x) от начальной точки a с заданным шагом h.

$$\begin{array}{ll} x_0 = a & y_0 = f(x_0) \\ x_1 = x_0 + h & y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h) \\ x_2 = x_1 + h & y_2 = f(x_2) = f(x_1 + h) \end{array} \tag{6.4}$$

Сравнение функции на следующем и предыдущем шаге позволяет определить X_{min} и саму функцию $f(X_{min})$.

При поиске максимума разность $y_i - y_{i+1}$ будет больше нуля до тех пор, пока не найдется корень $X_{min+\varepsilon}$ и $(y_i$-$y_{i+1})<0$. Например, в системе MathCAD можно использовать функцию Minner или функцию Root для поиска X_{min} при равенстве производной нулю.

Приведем реализацию описанных методов в MathCAD на примере поиска максимума объёма пожарного ведра. Надо из круглой заготовки радиусом R вырезать сегмент с углом α, но так, чтобы объем ведра был бы максимален (рис. 6.3).

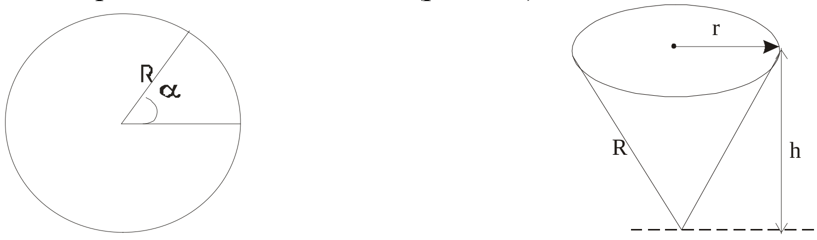


Рис. 6.3. Схема пожарного ведра

Объём ведра: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. В зависимости от угла α получим:

$r(\alpha)=R\left(1-\frac{\alpha}{360}\right)$ — радиус верхней плоскости;

$h(\alpha)=R\sqrt{1-r(\alpha)^2}$ — высота ведра;

$V(\alpha)=\frac{\pi}{3}r(\alpha)^2 h(\alpha)$ — объем ведра.

В задании 6.1 представлены 5 способов нахождения максимума объёма V(α), реализованные в MathCad.

Задание 6.1.

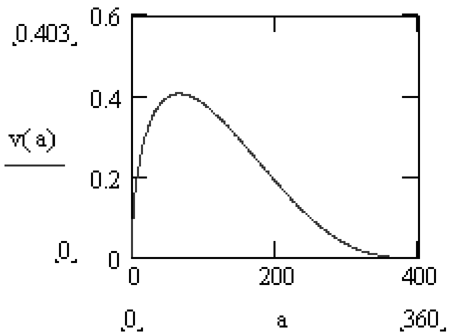
Найти угол вырезки сегмента (α), при котором объем (V) пожарного ведра максимален. Решение выполнено в системе MathCad.

Зададим диапазон и функции:

R:=1 a:=0..360

$r(a):=R\left(1-\frac{a}{360}\right)$ $h(a):=R\sqrt{1-r(a)^2}$ $v(a):=\frac{\pi}{3}r(a)^2 h(a)$

Получим график:



1-й способ использует вычислительный блок Given–Find.

a:=60

Given

$\frac{d}{da}V(a)=0$

a01:=Find(a)

a01=66.061

v(a01)=0.403

Получили оптимальный угол a01=66,061, при котором объём максимален и равен 0,403.

2-й способ использует встроенную в MathCAD функцию Minerr, которая ищет наименьшее отклонение от заданного предела функции. В данном случае в качестве предела объёма взято значение V(α)=0.5.

a:=60

Given

v(a)=0.5

a02:=Minerr(a)

a02=66.061

v(a02)=0403

Функция Minerr нашла локальный максимум X_{max}=66,061, при котором объём максимален и равен 0,403.

3-й способ использует встроенную в MathCAD функцию Root, которая в данном случае ищет значение угла α, при котором производная объема равна нулю $\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = 0$.

TOL:=10^{-7} — точность вычислений

a:=60

$$ao3 := \mathrm{root}\left(\frac{d}{da}v(a), a\right)$$

a03=66.061   v(a02)=0.403

Видно, что найден локальный экстремум X_{max}=66,061, при котором объём максимален и равен 0,403.

4-й способ использует перебор. Угол α изменяется от 30° до 360°. Из всех значений объёма V(α) выбирается максимальный V_{max}=V(α) и выбирается угол, соответствующий этому максимуму.

a:=0..360

v_a:=v(a)

vmax:=max(v)

$$a04 := \sum_{a=0}^{360} \left(v_a = vmax\right)\cdot a$$

a04=66   vmax=0.403

Видно, что найден локальный экстремум X_{max}=66, при котором объём максимален и равен 0,403.

5-й способ соответствует методу «сканирования», то есть вычисление и сравнение функции y в точках x_i с заданным шагом hh. Приняты обозначения:

a_n, b_k — начало и конец отрезка, где есть максимум;

hh — шаг;

n — число точек;

x_0, y_0 — начальные значения x и y;

x_{i+1}, y_{i+1} — значения x и y на (i+1)-й итерации;

xxa_{i+1}, xxb_{i+1} — начало и конец нового отрезка;

$pr_i=y_i - y_{i+1}$ — признак разности функции на (i)-й и(i+1)-й итерации.

Локальный максимум будет вычислен, как только pr_i станет меньше нуля.

an:=65.99   bk:=66.1   hh:=0.01

$$n := \frac{bk - an}{hh} + 1$$

n=12

i:=0..n

x_0:=an

$$y_0 := \pi\cdot\left(r\left(x_0\right)\right)^2\cdot h\left(x_0\right)$$

xxa_0:=an xxb_0:=bk pr_0:=0

$x_{i+1}:=x_i+hh$ $y_{i+1}:=\pi(r(x_{i+1}))^2\cdot h(x_{i+1})$

$xxa_{i+1}:=x_{i+1}$ $xxb_{i+1}:=xxa_{i+1}+hh$

$pr_{i+1}:=y_i-y_{i+1}$

$$kor_i := \mathrm{if}\left(pr_i > 0, xxa_i - \frac{hh}{2}, 0\right)$$

$x_i =$	$y_i =$	$xxa_i =$	$xxb_i =$	$pr_i =$	$kor_i =$
65.99	1.209	65.99	66.1	0	0
66	1.209	66	66.01	$-1.113 \cdot 10^{-7}$	0
66.01	1.209	66.01	66.02	$-9.45 \cdot 10^{-8}$	0
66.02	1.209	66.02	66.03	$-7.769 \cdot 10^{-8}$	0
66.03	1.209	66.03	66.04	$-6.087 \cdot 10^{-8}$	0
66.04	1.209	66.04	66.05	$-4.407 \cdot 10^{-8}$	0
66.05	1.209	66.05	66.06	$-2.726 \cdot 10^{-8}$	0
66.06	1.209	66.06	66.07	$-1.047 \cdot 10^{-8}$	0
66.07	1.209	66.07	66.08	$6.33 \cdot 10^{-9}$	66.065
66.08	1.209	66.08	66.09	$2.312 \cdot 10^{-8}$	66.075
66.09	1.209	66.09	66.1	$3.991 \cdot 10^{-8}$	66.085
66.1	1.209	66.1	66.11	$5.669 \cdot 10^{-8}$	66.095

Видно, что найден локальный экстремум $X_{max} = 66{,}065$, при котором объём максимален.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Всеми способами найдите локальные максимумы функции.

Вариант	1	2	3	4
Функция	$-2x^2+5x-3$	$-3x^2+7x+1$	$-4x^2-2x+4$	$-5x^2+2x+2$
Вариант	5	6	7	8
Функция	$-6x^2+x-7$	$-7x^2+3x-3$	$-8x^2+5x-1$	$-9x^2+7x+8$

7. ПОИСК МИНИМУМА (МАКСИМУМА) ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача поиска минимума формулируется следующим образом: найти минимум функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \to \min, \tag{7.1}$$

при ограничениях

$$x \in R \tag{7.2}$$

В двухмерном случае задача имеет геометрическую иллюстрацию. Если функция $f(x_1, x_2)$ имеет локальный минимум, то поверхность в трехмерном пространстве имеет форму чаши, как показано на рисунке 7.1. Решение (точка минимума) соответствует значениям $x_{1опт}$ и $x_{2опт}$.

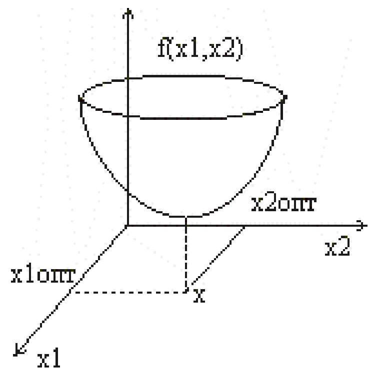
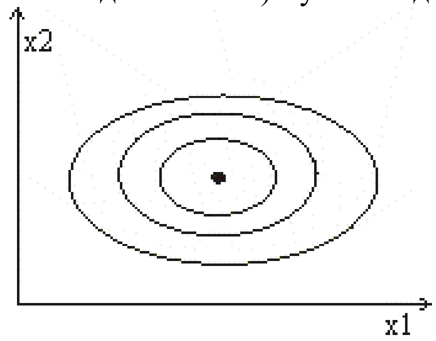
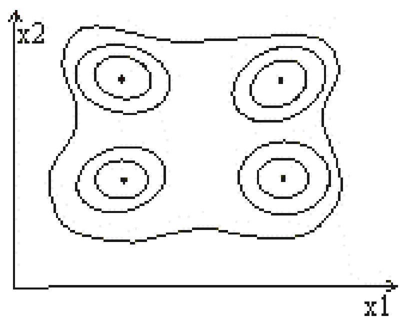


Рис. 7.1. Трехмерный график функции 2-х переменных, имеющей минимум

Если пересечь поверхность плоскостью, перпендикулярной $f(x_1, x_2)$, то получатся линии уровня $f(x_1, x_2)=const$. Если функция $f(x_1, x_2)$ имеет один экстремум, то она называется мономодальной. Если функция имеет более одного экстремума, то она называется мультимодальной, например, функция Химмельблау. На рисунке 7.2 показаны линии уровня функций: а) мономодальной и б) мультимодальной:



а)



б)

Рис. 7.2. Линии уровня

Чтобы найти точку x^* локального минимума, составляют последовательность точек приближения x^k (к=0, 1, .., n), сходящихся к точке x^*. Последовательность значений функций в этих точках $f(x^k)$ должна быть монотонно убывающей и ограниченной снизу, то есть:

$$f(x^0) \geq f(x^1) \geq \ldots f(x^k) \geq \ldots f(x^*) \tag{7.3}$$

Решение задачи в двухмерном случае напоминает спуск на дно чаши. Поэтому методы решения называют «методами спуска». Сначала выбирают точку x^0. Дальнейшие приближения x^k определяют соотношениями:

$$x^{k+1} = x^k + t^k \cdot s^k, \quad \text{при к=0, 1, 2, …, n}, \tag{7.4}$$

где s^k — вектор направления спуска;

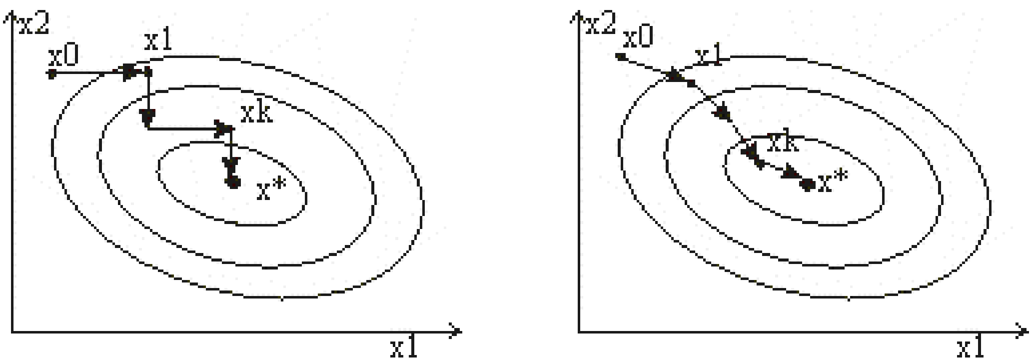
t^k — скалярная величина (шаг), определяемая решением задачи одномерной минимизации

$$f(x^k + t \cdot s^k) \to \min \quad t = t_{min}. \tag{7.5}$$

Таким образом, задача поиска минимума нескольких переменных сводится к последовательности задач одномерной минимизации (7.5) по переменной t на отрезках n-мерного пространства, проходящих через точки x^k в направлении векторов s^k. То есть необходимо сначала определить направление (вектор спуска), а затем, двигаясь в этом направлении с каким-то шагом, определить параметры минимизации функции (решить задачу одномерной минимизации) каким-либо методом, например, методом сканирования или методом половинного деления.

7.1. Метод покоординатного спуска (метод Гаусса-Зейделя)

В этом методе решение получают по следующей схеме. Выбирают начальную точку x^0 и определяют приближения x^k по формуле (7.4). При этом вектор направления спуска s^k берут как единичный вектор, совпадающий с каким-либо координатным направлением. Например, если s^k параллелен x_1, то s^k=(1, 0, 0, …, 0), а если параллелен x_2, то s^k=(0, 1, 0, …, 0), то есть по очереди двигаются по каждой координате. Реализация метода в 2-х мерном случае дает траекторию приближения к точке (x^*), состоящую из звеньев ломаной линии, соединяющей точки ($x^k \to x^{k+1} \to x^{k+2} \to x^*$), как показано на рисунке 7.3, а.



а) б)

Рис. 7.3. Направления движения к точке решения x^*
а) для метода координатного спуска и б) для метода наискорейшего спуска

7.2. Метод наискорейшего спуска

В этом методе также, исходя из начальной точки x^0, строят последовательность приближений x^k по формуле (7.4). При этом вектор направления спуска берут в направлении градиента функции f(x) в точке x^k, т.е. перпендикулярно линии уровня в этой точке. В двухмерном случае получают траекторию приближения к точке x^*, состоящую из звеньев ломаной линии, соединяющей точки ($x^k \to x^{k+1} \to x^{k+2} \to x^*$), как показано на рисунке 7.3, б.

7.3. Методика поиска минимума функции нескольких переменных с использованием производных

Как известно, условию экстремума функции соответствует условие равенства нулю производных этой функции в точках экстремума:

$$\frac{df(x_1, x_2, ..., x_n)}{dx_1} = 0 \qquad \frac{df(x_1, x_2, ..., x_n)}{dx_2} = 0 \ldots \qquad \frac{df(x_1, x_2, ..., x_n)}{dx_k} = 0\,. \quad (7.6)$$

Используем это положение при нахождении минимума функции в пакете MathCad (задание 7.1).

Для определения вида экстремума (минимума или максимума) можно использовать условие, что при минимуме функции разность $\Delta f = f(x_0,y_0) - f(x_{0+\Delta},y_{0+\Delta})>0$, а при максимуме $\Delta f<0$, где x_0, y_0 — координаты точки экстремума; Δ — любое малое приращение к x0 и y0.

Задание 7.1

Найдем минимум функции Розенброка $f(x,y) = 100\cdot(y - x^2)^2 + (1-x)^2$ в системе MathCad.
Точки для построения графика:
x1:=-2 x2:=2 y1:=-1 y2:=2
N:=20
i:=0..N

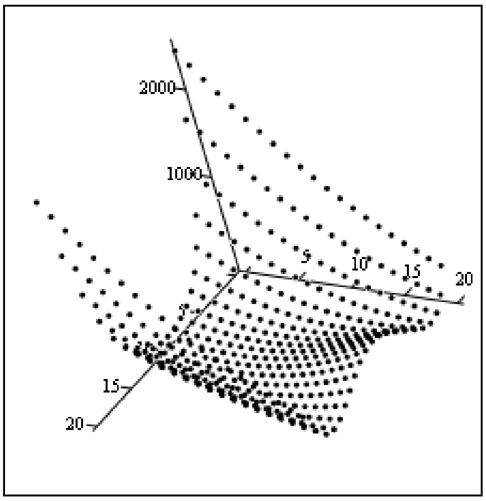
$x_i := x1 + (x2 - x1)\cdot\frac{i}{N}$ — точки вдоль оси x

j:=0..N

$y_{ji} := y1 + (y2 - y1)\cdot\frac{i}{N}$ — точки вдоль оси y

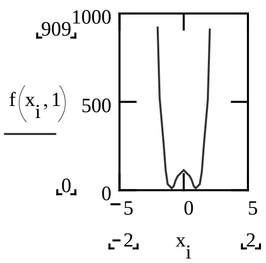
$M_{i,j} := f(x_i, y_j)$ — матрица всех значений $f(x_i, y_i)$

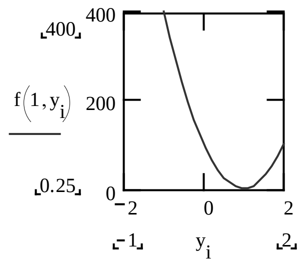
Получим трехмерный график:



M

Получим двухмерные графики при закреплении y_i=1 и x_i=1:





а) Поиск точного решения
x:=2 y:= –2 — начальные приближения
Given

$\frac{d}{dx}f(x,y)=0 \qquad \frac{d}{dy}f(x,y)=0$

$\begin{bmatrix} xop \\ yop \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(x,y)$

xop=1 yop=1 — полученные оптимальные параметры
f(xop, yop)=$1.499\cdot10^{-11}$ — полученная минимальная функция
Оптимальными параметрами являются xop=1 и yop=1. При этом минимум f_{min}=0.

На графиках построены трехмерная функция M(x, y) и двухмерные функции при закреплении оптимальных параметров $f(x_i, 1)$ и $f(1, y_i)$.

б) Поиск приблизительного решения перебором
fmin:=min(M) — минимальное из всех значений
$fmin=1.856\cdot10^{-3}$

$$iopt := \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} (M_{i,j}=fmin)\cdot i$$ — поиск i, соответствующего минимуму

$$jopt := \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} (M_{i,j}=fmin)\cdot j$$ — поиск j, соответствующего минимуму

$x_{iopt}=0.96$ $\quad y_{jopt}=0.92$

Видно, что целевая функция равна нулю, а значения x_{iopt} и y_{jopt} близки к 1.

Задание 7.2.

Найдем четыре минимума функции Химмельблау:

$$Z(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

и ее оптимальные параметры.

$Z(x1, x2) := (x1^2 + x2 - 11)^2 + (x1 + x2^2 - 7)^2$

x1:=1.5 x2:=1.5 — начальные приближения к первому корню

Given

$\frac{d}{dx1}z(x1,x2)=0 \qquad \frac{d}{dx2}z(x1,x2)=0$

$\begin{bmatrix} x1op \\ x2op \end{bmatrix} := Find(x1, x2)$

x1op=3 x2op=2 — оптимальные параметры

$f(x1op, x2op)= 4.904\cdot10^3$ — первый минимум

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Меняя начальные приближения x1 и x2, найдите все четыре минимума функции Химмельблау. Для определения начальных приближений используйте график функции.

	1-я точка	2-я точка	3-я точка	4-я точка
x1опт	3	–2.805	3.584	–3.779
x2опт	2	3.131	–1.848	–3.283
Zmin	4904	2259	21600	30880

2. Задайте самостоятельно нелинейную функцию двух переменных, постройте график и найдите все ее экстремумы.

8. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование — это раздел математики, занимающийся решением таких задач на отыскание наибольших и наименьших значений, для которых методы математического анализа оказываются непригодными. К их числу, например, относятся задачи на рациональное использование оборудования или сырья и другие.

Математическая формулировка основной задачи линейного программирования такова:

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ &a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{aligned} \tag{8.1}$$

и линейная функция

$$f = c_1\cdot x_1 + c_2\cdot x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n \to \min. \tag{8.2}$$

Требуется найти такое неотрицательное решение системы

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \cdots x_n \ge 0, \tag{8.3}$$

при котором функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение. Уравнения (8.1) называются системой ограничений, а функция (8.2) называется целевой функцией.

Преобразуем (8.1) таким образом, чтобы какие-либо r ее неизвестных были выражены через остальные $r+1 \div n$.

$$\begin{aligned} &x_1 = a_{1,r+1}\cdot x_{r+1} + \ldots + a_{1n}\cdot x_n + \beta_1 \\ &x_2 = a_{2,r+1}\cdot x_{r+1} + \ldots + a_{2n}\cdot x_n + \beta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_r = a_{r,r+1}\cdot x_{r+1} + \ldots + a_{rn}\cdot x_n + \beta_r \end{aligned}, \tag{8.4}$$

причем

$$\beta_1 \ge 0,\ \beta_2 \ge 0, \ldots \beta_r \ge 0 \tag{8.5}$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называются базисными неизвестными, а остальные — небазисными (или свободными).

Совокупность неизвестных Б = ($x_1, x_2, \ldots, x_к$) называется базисом. Подставляя в функцию (8.2) вместо базисных неизвестных их выражения (8.4), можно целевую функцию f представить через свободные неизвестные:

$$f = \gamma_0 + \gamma_{r+1}\cdot x_{r+1} + \ldots + \gamma_n\cdot x_n \tag{8.6}$$

Если принять, что все свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ равны нулю, то из (8.4) получим:

$$x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2, \ldots, x_r = \beta_r \tag{8.7}$$

Это одно из допустимых решений системы (8.3), то есть получим:

$$\begin{cases} \text{Á} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, 0, 0, \ldots, 0) \\ \quad f = \gamma_0 \end{cases} \tag{8.8}$$

Необходимо перейти от базиса Б к новому базису Б′ так, чтобы новое значение f уменьшилось

$$f_{Б'} < f_{Б} \tag{8.9}$$

Переход к новому базису Б′ происходит путем удаления из исходного базиса Б одной из неизвестных и введения вместо нее какой-либо следующей свободной неизвестной. Для этого необходимо перестроить систему (8.4). Результатом каждого очередного этапа преобразования является новый базис и соответствующее ему базисное решение и целевая функция. Этот метод называют симплекс-методом (или методом последовательного улучшения плана). Этот метод реализован в ряде математических программ и прикладных пакетов, например в электронной таблице Excel.

Рассмотрим задачу линейного программирования на примере задачи производства стульев. Пусть мебельной фабрикой выпускаются стулья 2-х типов стоимостью 8 и 12 рублей. Под их выпуск выделены лимиты (ресурсы): 440 метров досок и 65 м^2 ткани, а также не больше 320 человеко-часов работы. Сколько материала идет на каждый стул представлено в таблице.

Тип стульев	Расход досок, м	Расход ткани, м^2	Расход чел.-час	Цена одного стула, руб.
С1	2	0,5	2	8
С2	4	0,2	2,5	12
Ресурс	440	65	320	

Найти сколько стульев необходимо выпускать каждого типа (С1, С2), чтобы суммарная цена была максимальна.

Запишем эту задачу, как задачу линейного программирования:

Найти максимум целевой функции $f = 8 \cdot C1 + 12 \cdot C2 \to \max$

при ограничениях

$$2 \cdot C1 + 4 \cdot C2 \le 440$$

$$0{,}5 \cdot C1 + 0{,}25 \cdot C2 \le 65$$

$$2 \cdot C1 + 2{,}5 \cdot C2 \le 320$$

Задание 8.1.

Решим задачу из примера 8.1 в системе MathCad, используя метод перебора и условные функции для учета ограничений.

ORIGIN:=1

Счетчики стульев

c1:=1..100 c2:=1..100

Целевая функция (цена)

$Va1_{c1,c2}$:=8·c1+12·c2

Ограничение по доскам

$Va1_{c1,c2}$:=if[(2·c1+4·c2)≤440, $Va1_{c1,c2}$,0]

Ограничения по ткани

$Va1_{c1,c2}$:=if[(0.5·c1+0.25·c2)≤65, $Va1_{c1,c2}$,0]

Ограничения по человеко-часам

$Va1_{c1,c2}$:=if[(2·c1+2.5·c2)≤320, $Va1_{c1,c2}$,0]

Максимальная цена

Valmax:=max(Val)

Оптимальное количество стульев типа 1

$$c10 := \sum_{c1=1}^{100} \sum_{c2=1}^{100} \left(Val_{c1,c2} = Valmax\right) \cdot c1$$

Оптимальное количество стульев типа 2

$$c20 := \sum_{c1=1}^{100} \sum_{c2=1}^{100} \left(Val_{c1,c2} = Valmax\right) \cdot c2$$

c10=60 c20=80 Valmax=1.44×10^3

Видно, что для того, чтобы цена была максимальной 1440 рублей, необходимо выпускать стульев типа С1 — 60 штук, а типа С2 — 80 штук.

8.1. Методика решения оптимизационных задач в электронных таблицах Excel

В предыдущих разделах рассмотрены методы решения оптимизационных задач в математическом пакете MathCAD. В электронных таблицах Excel для решения оптимизационных задач разработан целый блок, в котором использованы соответствующие математические методы. При этом поиск минимума функций одной переменной и нескольких переменных, а также задачи линейного и нелинейного программирования имеют общий алгоритмический подход их решения.

Поиск минимума функции одной переменной

Задача формулируется классически: найти минимум целевой функции $Z(x) \rightarrow min$ при ограничениях, $x \in R$. Алгоритм решения в Excel представлен в задании 8.2.

Задание 8.2.

Пусть целевая функция (минимум которой надо найти) имеет вид:

$$Z = x^3 - 6x^2 + 15 \quad \rightarrow \quad min.$$

Ограничений нет.

Порядок решения при помощи электронной таблицы Excel:

1. Вместо переменной x будем использовать ячейку a1.
   Задаем начальное значение переменной x равное 1 в ячейку a1.
2. Уравнения ограничений нет.
3. Задаем формулу целевой функции в ячейку b1:= a13 – 6a12 + 15.
4. Заходим в меню Сервис / Поиск решения:

– установить целевую ячейку — пишем b1
– устанавливаем — Искать минимум
– изменяемые ячейки — a1
– Ограничения — нет
– Параметры — посмотреть и установить нужное (можно ничего не менять)
– Выполнить
– Восстановить / Сохранить найденное решение / Тип отчета (результаты) ОК

5. Отчет результатов на листе 1.
   Получено решение:
   x = 4, Z = –17

Решите этот пример с ограничением a1= x>5. Решение: x=5 Z = –10.
Решите этот пример с ограничением a1= x<3. Решение: x=3 Z = –12.

Поиск минимума функции нескольких переменных в Excel

Задача формулируется классически: найти минимум целевой функции $Z(x1, x2, \ldots, xn) \rightarrow min$ при ограничениях, $x1 \in R1$, $x2 \in R2$, …, $xn \in Rn$. Алгоритм решения в Excel представлен в задании 8.3.

Задание 8.3.

Пусть целевая функция (минимум которой надо найти) имеет вид:

$$Z = x1^2 + 2x1 + 3 + x2^2 + 3x2 + 4 \rightarrow \text{минимум}$$

Ограничений нет

Порядок решения при помощи электронной таблицы Excel:

1. Задаем начальные значения переменных x1 и x2 равные 1 в ячейки a1 и a2.
2. Уравнения ограничений не заданы.
3. Задаем формулу целевой функции в ячейку b1:= $a1^2 + 2a1 + 3 + a2^2 + 3a2 + 4$.

4. Заходим в меню Сервис / Поиск решения:
– установить целевую ячейку — пишем b1
– устанавливаем — Искать минимум
– изменяемые ячейки — a1; a2
– Ограничения — нет
– Параметры — посмотреть и установить нужное (можно ничего не менять)
– Выполнить
– Восстановить / Сохранить найденное решение / Тип отчета (результаты) ОК
5. Отчет результатов на листе 1.
Получено решение:
x1 = –1 x2 = – 1,5 Z=3,75

Решите этот пример с ограничениями a1 = x1<0, a2 = x2>0. Решение: x1=–1 x2=0 Z=6.
Решите этот пример с ограничениями a1 = x1>0, a2 = x2>0. Решение: x1=0 x2=0 Z=7.

Задача линейного программирования

Задача формулируется классически:

Требуется найти такие неотрицательные значения $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0,$ при которых целевая функция $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n$ принимает наименьшее (наибольшее) значение при линейной системе ограничений

$$\begin{aligned} &a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \ge b_1 \\ &a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \ge b_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n \ge b_m \end{aligned}$$

Алгоритм решения в Excel представлен в задании 8.4.

Задание 8.4.

При лечении вам назначили питание фруктами. При этом вам необходимо получать в неделю не менее 10 единиц витамина A, не менее 8 единиц витамина C и не менее 5 единиц витамина D. Для этого можно покупать три вида фруктов — апельсины, бананы, лимоны. Стоимость 1 кг этих фруктов и содержание единиц витаминов в каждом килограмме указаны в таблице.

Какое количество фруктов x1, x2, x3 надо покупать каждую неделю, чтобы получить необходимое количество витаминов 10, 8, 5 и потратить минимум денег Z?

Витамины	Количество единиц витаминов в 1 кг			Необходимо единиц витамин
	Апельсины	Бананы	Лимоны	
A	2	3	3	>=10
C	3	1	2	>=8
D	1	3	1	>=5
Стоимость 1 кг, руб.	20	18	15	

Целевая функция (затраты на покупку фруктов):

$$Z = 20 \cdot x_1 + 18 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 \to \min$$

Ограничения:

$$\begin{aligned} &2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 10 \\ &3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \ge 8 \\ &1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \ge 5 \\ &x_1 \ge 5 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Порядок решения при помощи электронной таблицы Excel:
1. Задаем начальные значения x1, x2, x3 равные 1 в ячейки a1, a2, a3.
Теперь вместо x1, x2, x3 будут фигурировать ячейки a1, a2, a3.

2. Задаем уравнения ограничений в ячейки b1, c1, d1:
   b1: = 2a1 + 3a2 + 3a3
   c1: = 3a1 + 1·a2 + 2a3
   d1: =1·a1 + 3a2 + 1·a3
3. Задаем целевую функцию в ячейку b2:
   b2: = 20a1 + 18a2 + 15a3
4. Заходим в меню Сервис — Поиск решения
   установить целевую ячейку — пишем b2
   устанавливаем — Искать минимум
   изменяемые ячейки — a1; a2; a3
   Ограничения / добавить b1>=10 c1>=8 d1>=5 a1>=0 a2>=0 a3>=0
   Параметры - посмотреть и установить нужное (можно ничего не менять)
   Выполнить
   Восстановить / Сохранить найденное решение / Тип отчета (результаты) ОК
5. Отчет результатов на листе 1.
   Получено решение (необходимо покупать):
   апельсин — x1 = 1,181 кг, бананов — x2 = 0,636 кг, лимонов — x3 = 1,909 кг.
   При этом минимальные затраты денег составляют Z=63,72 рубля.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1) Согласно вашему варианту, найдите минимум функции одной переменной без ограничений и с ограничениями при помощи электронной таблицы Excel. Ограничения придумайте сами.

Вариант	Функция
1	$x^3 + \frac{x^4}{3}$
2	$2 \cdot x^3 + \frac{x^4}{3}$
3	$x^3 + 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x$
4	$x^3 + 7 \cdot x^2 + 8 \cdot x$
5	$x - 2 \cdot \ln(x)$
6	$2 \cdot x - 3 \cdot \ln(x)$
7	$\frac{x^4}{4} - 2 \cdot x^2$
8	$x^4 - 3 \cdot x^2$

2) Найдите, согласно вашему варианту, минимум функции нескольких переменных без ограничений и с ограничениями при помощи электронной таблицы Excel. Ограничения придумайте сами.

Вариант	Функция
1	$x_1^2 + 3 \cdot x_1 + 4 + x_2^2 + 5 \cdot x_2 + 3$
2	$2 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_1 + 5 + x_2^2 + 2 \cdot x_2 + 1$
3	$3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 + 10 + 4 \cdot x_2^2 + 5 \cdot x_2 + 5$
4	$4 \cdot x_1^2 + 7 \cdot x_1 + 15 + 4 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_2 + 1$
5	$2 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_1 - 3 + 2 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_2 - 4$
6	$3 \cdot x_1^2 + 5 \cdot x_1 - 5 + 3 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_2 - 3$
7	$4 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_1 - 3 + 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_2 - 1$
8	$5 \cdot x_1^2 + 7 \cdot x_1 - 1 + 5 \cdot x_2^2 + 6 \cdot x_2 - 2$

3) Придумайте сами задачу линейного программирования и решите ее в системе MathCad и при помощи электронной таблицы Excel.

9. РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Простейшими обыкновенными дифференциальными уравнениями являются уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y). \tag{9.1}$$

Решение этого уравнения формулируется как задача Коши: Найти решение уравнения (9.1) в виде функции y(x), удовлетворяющей начальному (граничному) условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{9.2}$$

Все методы решения дифференциальных уравнений можно разбить на три группы:

– аналитические методы, когда решение находится в виде аналитического выражения;

– графические методы, дающие приближенное решение в виде графика;

– численные методы, когда искомая функция получается в виде таблицы;

Известно, что дифференциальные уравнения n-го порядка можно свести к системе уравнений 1-го порядка. Так, например, уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

можно записать в виде системы из двух уравнений

$$y' = z$$

$$z' = f(x, y, z).$$

Рассмотрим методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.

9.1. Метод Эйлера

Этот метод на основе графического решения дает и решение в табличном виде. Пусть дано уравнение (9.1) с условием (9.2). Выбрав малый шаг h, построим, начиная с точки x_0, систему равноотстоящих точек $x_i=x_0+i\cdot h$, при i = 0, 1, … На рисунке 9.1 изображен график интегральной кривой.

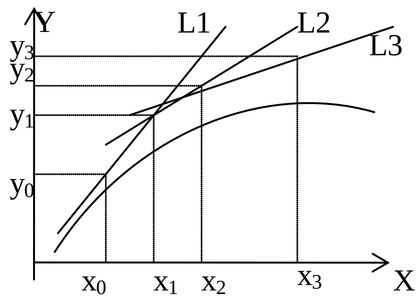


Рис. 9.1. Графическое изображение метода Эйлера

Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$ с уравнением $y = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot(x - x_0)$. Обозначим эту касательную как L1. При $x=x_1$ из уравнения касательной L1 получим $y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$, то есть приращение функции на первом шаге имеет вид:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = h\cdot f(x_0, y_0).$$

Алогично, проводя касательную L2 к некоторой кривой в точке $M_1(x_1, y_1)$ получим:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)\cdot(x - x_1).$$

Что при x=2 дает $y_2 = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1)$, то есть приращение равно:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = h\cdot f(x_1, y_1).$$

Таким образом, для табличного решения методом Эйлера необходимо циклически вычислять пару формул:

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= h \cdot f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k \end{aligned} \qquad к = 0, 1, 2 \ldots \qquad (9.3)$$

Надо отметить, что метод Эйлера обладает малой точностью. Решение методом Эйлера представлено в задании 9.1.

9.2. Метод Эйлера-Коши

Существуют различные уточнения метода Эйлера. Они направлены на то, чтобы более точно определить направление перехода из точки x_i, y_i в точку x_{i+1}, y_{i+1}. Например, метод Эйлера-Коши рекомендует следующий порядок вычислений:

$$\begin{aligned} y^*_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})}{2} \end{aligned} \qquad (9.4)$$

Геометрически это означает, что мы определяем направление интегральной кривой в исходной точке x_i, y_i и во вспомогательной точке x_{i+1}, y^*_{i+1}, а в качестве окончательного направления берем среднее из этих направлений. Решение методом Эйлера — Коши представлено в задании 9.1.

9.3 Метод Рунге-Кутта

В методе Рунге-Кутта вычисляют четыре вспомогательных коэффициента, соответствующих своим направлениям касательных. При этом расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 &= h \cdot f(x, y) \\ k_2 &= h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= h \cdot f(x + h, y + k_3) \end{aligned} \qquad (9.5)$$

$$\Delta y_x = \frac{1}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

$$y_{x+h} = y_x + \Delta y_x$$

При малом шаге h решение получается довольно точное.

Геометрический смысл метода Рунге-Кутта состоит в следующем. Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении $\alpha_1 = \mathrm{arctg}(f(x_i, y_i))$. На этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$. Затем из точки ($x_i$, y_i) сдвигаются в направлении $\alpha_2 = \mathrm{arctg}(f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}))$, и на этом направлении выбирается точка с коэффициентами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$. Наконец, из точки ($x_i$, y_i) сдвигаются в направлении $\alpha_3 = \mathrm{arctg}(f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}))$, и на этом направлении выбирается точка с коэффициентами $(x_i + h, y_i + k_3)$. Этим задается направление $\alpha_4 = \mathrm{arctg}(f(x_i + h, y_i + k_3))$. Четыре полученных направления усредняются. На этом окончательном направлении и выбирается очередная точка (x_{i+1}, y_{i+1})=(x_i+h, y_i+Δy). Решение методом Рунге-Кутта представлено в задании 9.1.

9.4. Методика решения задачи Коши с использованием встроенных в Mathcad функций

Для решения задачи Коши методом Рунге-Кутта в системе Mathcad представлена функция rkfixed(y, x1, x2, N, D),

где y — вектор начальных условий, размерностью n, где n – порядок дифференциального уравнения или число уравнений в системе (если решается система дифференциальных уравнений). Для дифференциального уравнения первого порядка вектор y вырождается в точку;

x1, x2 — граничные точки интервала, на котором ищется решение. Начальные условия в y — это значения решения в точке x1;

N — число точек (не считая начальной), в которых ищется решение;

D(x, y) — функция в виде вектора из n элементов, содержащих первые производные неизвестных функций.

9.5. Пример расчета

В качестве примера решения дифференциального уравнения рассмотрим задачу переходного процесса в цепи, состоящей из R и L элементов и э.д.с. (e) при замыкании выключателя.

Рисунок цепи представлен на рисунке 9.2. Необходимо найти изменение тока I во времени t.

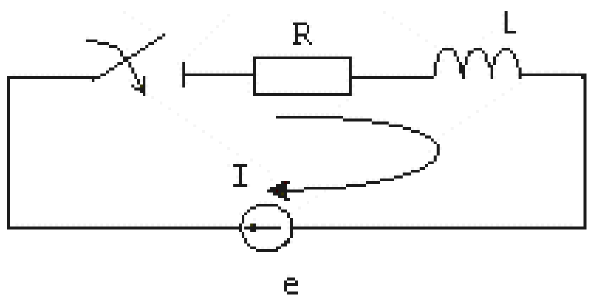


Рис. 9.2. Цепь из R, L, e

Для этой цели справедливо уравнение для каждого момента времени t:

$$e(t) = L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I$$

Приведем это уравнение к виду (9.1). Для этого вынесем производную влево, тогда

$$\frac{dI}{dt} = \frac{e(t) - R \cdot I}{L}$$

Зададим э.д.с. в виде синусоиды:

$$e(t) = E \cdot \sin(\omega \cdot t + a),$$

где E — модуль э.д.с.;

$\omega=2\cdot\pi\cdot f_c$, где f_c — частота сети;

a — начальный угол синусоиды.

Обозначим производную $f(I,t) = \frac{dI}{dt}$. Тогда получим уравнение для решения:

$$f(I,t) = \frac{E \cdot \sin(\omega \cdot t + a) - R \cdot I}{L}. \tag{9.6}$$

Решение этого уравнения в системе представлено в задании 9.1 при R=200 (Ом), L=40 (Гн), F_c:=50 (Гц), E:=10 (В), a=0.1 (рад).

Задание 9.1.

Решим уравнения (9.6) в системе Mathcad.
Зададим:
R:=200 — сопротивление
L:=40 — индуктивность
a:=0.1 — угол
f_c:=50 — частота сети
E:=10 — модуль э.д.с.
$w:=2\cdot\pi\cdot f_c$

$$f(i,t) := \frac{E\cdot\sin(w\cdot t + a) - R\cdot i}{L}$$

h:=0.001 — шаг
N:=10 — число точек
$k := 0 .. N-1$

Решение методом Эйлера:

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ i_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} t_{k+1} \\ i_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + h \\ i_k + h\cdot f\left(i_k, t_k\right) \end{bmatrix}$$

Решение методом Эйлера-Коши:

$$\begin{bmatrix} tt_0 \\ ii_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} tt_{k+1} \\ ii_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} tt_k + h \\ ii_k + h\cdot f\left(ii_k + h\cdot\dfrac{f\left(ii_k, tt_k\right)}{2}, tt_k\right) \end{bmatrix}$$

Решение методом Рунге-Кутта:

$k1(i,t):=h\cdot f(i,t)$

$$k2(i,t) := h\cdot f\left(i + \frac{k1(i,t)}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

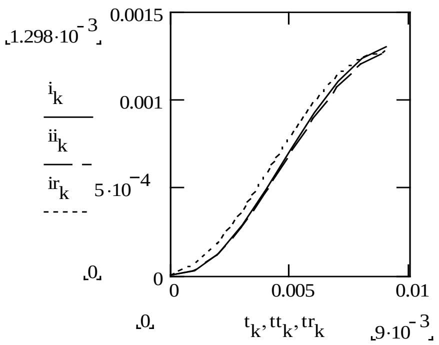
$$k3(i,t) := h\cdot f\left(i + \frac{k2(i,t)}{2}, t + \frac{h}{2}\right)$$

$$k4(i,t) := h\cdot f\left(i + k3(i,t), t + h\right)$$

$$K(i,t) := \frac{k1(i,t) + 2k2(i,t) + 2k3(i,t) + k4(i,t)}{6}$$

$$\begin{bmatrix} tr_0 \\ ir_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} tr_{k+1} \\ ir_{k+1} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} tr_k + h \\ ir_k + K\left(ir_k, tr_k\right) \end{bmatrix}$$

Получим все графики изменения токов, найденных тремя методами:



Видно, что все три метода, в данном случае, дают приблизительно одинаковые изменения тока i, ii, ir во времени t. Графики почти полностью совпадают.

Поменяйте шаг h=0.1, 0.01, 0.001, число точек N=50, 100. Что изменится?

Задание 9.2.

Решение уравнения (9.6) в системе Mathcad с помощью встроенных функций.

$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ — начальные условия

N:=10 K:=0..N–1

x_1:=0 x_2:=N·h — интервалы отрезка времени t1, на котором ищется изменение тока i1.

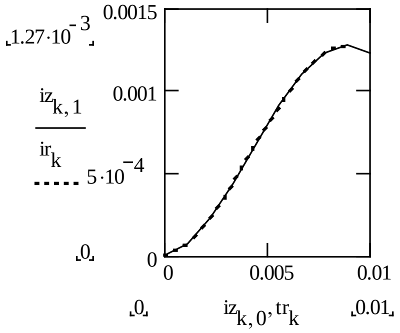
$d(t1, i1) := \dfrac{E \cdot \sin(w \cdot t1 + a) - R \cdot i1}{L}$ — производная, равная функции

iz:=rkfixed(y,x1,x2,N-1,d) — решение уравнения, которое выводится в виде матрицы:

	0	1	2
0	0	0	0
1	$1.111 \cdot 10^{-3}$	$7.33 \cdot 10^{-5}$	$7.33 \cdot 10^{-5}$
2	$2.222 \cdot 10^{-3}$	$2.267 \cdot 10^{-4}$	$2.267 \cdot 10^{-4}$
3	$3.333 \cdot 10^{-3}$	$4.368 \cdot 10^{-4}$	$4.368 \cdot 10^{-4}$
4	$4.444 \cdot 10^{-3}$	$6.739 \cdot 10^{-4}$	$6.739 \cdot 10^{-4}$
5	$5.556 \cdot 10^{-3}$	$9.049 \cdot 10^{-4}$	$9.049 \cdot 10^{-4}$
6	$6.667 \cdot 10^{-3}$	$1.098 \cdot 10^{-3}$	$1.098 \cdot 10^{-3}$
7	$7.778 \cdot 10^{-3}$	$1.226 \cdot 10^{-3}$	$1.226 \cdot 10^{-3}$
8	$8.889 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
9	0.01	$1.221 \cdot 10^{-3}$	$1.221 \cdot 10^{-3}$

В первом столбце этой матрицы находятся координаты точек $z_{k,0}$=t1, в которых ищется решение. Во втором столбце этой матрицы находятся точки решения $z_{k,1}$=i1.

Получим графики найденного решения методом Рунге-Кутта и с использованием встроенной функции.



Видно, что эти графики полностью совпадают.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Решите самостоятельно дифференциальное уравнение, взятое из таблицы в соответствии со своим вариантом.

Вариант	Дифференциальное уравнение	Вариант	Дифференциальное уравнение
1	$y' = x \cdot y^3 - x^2$	6	$y' = \cos(1.5 \cdot y - x^2) + 1.4$
2	$y' = \sqrt{4 \cdot x^2 + 1} - 3 \cdot y^2$	7	$y' = 4.1 \cdot x - y^2 + 0.6$
3	$y' = \cos(1.5 \cdot x - y^2) - 1.3$	8	$y' = \dfrac{1}{1 + x^3 \cdot y} + 2 \cdot y$
4	$y' = x^2 + x \cdot y + y^2$	9	$y' = x + \cos(\dfrac{y}{\sqrt{11}})$
5	$y' = e^{-(y^2+1)} + 2 \cdot x$	10	$y' = \dfrac{2 \cdot x \cdot y}{x + 4} - 0.4$

10. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Пусть есть набор (массив) случайных чисел x_i, i=1, 2, …, n. Рассмотрим основные понятия математической статистики.

1) Математическое ожидание (среднее арифметическое):

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{10.1}$$

Элементы массива при одинаковом среднем значении M могут быть по-разному расположены относительно него. Например, массивы чисел 14, 15, 16 и 2, 3, 40 имеют одинаковое математическое ожидание M=15, но в первом случае элементы «близко» расположены к M, а во втором массиве значительно рассеяны вокруг M.

2) Степень рассеяния элементов массива относительно математического ожидания характеризует дисперсия D и среднее квадратичное отклонение S:

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2 \qquad S = \sqrt{D} \tag{10.2}$$

3) Меру изменчивости случайной величины характеризует коэффициент вариации V:

$$V = \frac{S}{M} \tag{10.3}$$

4) Если исследуется статистическая «выборка», характеризующаяся массивом x_i, i=1, …, n, то погрешность D_0, с которой результаты «выборки» можно распространить на всю «генеральную совокупность», равна:

$$D_0 = \frac{T \cdot V}{\sqrt{n}} \cdot 100 \tag{10.4}$$

При вероятности 0.95 T=2.

Примером исследования с помощью «выборки» являются разные опросы мнения населения по разным вопросам. Опрашивается не все население (генеральная совокупность), а только ее часть (выборка), и если погрешность мала (например, D<10%), то мнение опрошенного населения можно распространить на все население.

5) Регрессия.

Часто результаты опытов или опрос мнения описываются значениями не одной, а нескольких случайных величин, например Z и Y. Можно рассматривать этот набор точек как по оси Z так и по оси Y с координатами (Z_1, Y_1), (Z_2, Y_2), …, (Z_n, Y_n). Пусть между Z и Y существует линейная зависимость, тогда:

$$y=f(x)=a \cdot x+b. \tag{10.5}$$

Здесь a, b — называются коэффициентами регрессии, а прямая f(x) называется линейной регрессией Y на Z. Вычисления коэффициентов a, b совпадает с вычислениями по методу наименьших квадратов:

$$mz = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \qquad my = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad mzy = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i Y_i \qquad mz2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Z_i)^2 \tag{10.6}$$

$$MM = \begin{pmatrix} mz2 & mz \\ mz & 1 \end{pmatrix} \qquad M0 = \begin{pmatrix} mzy \\ my \end{pmatrix} \tag{10.7}$$

Точки (Zi, Yi), и регрессия f(t)=a·t+b построены в задании 10.

Суммарное отклонение dd равно:

$$dd = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a \cdot z_i - b)^2 \tag{10.8}$$

6). Корреляция.

Существует еще один показатель, характеризующий тесноту линейной связи между массивами w и p — это коэффициент корреляции, который вычисляется как:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i - mw)(p_i - mp)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i - nw)^2 \sum_{i=1}^{n}(p_i - mp)^2}}, \qquad (10.9)$$

где

$$mw = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad mp = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \qquad (10.10)$$

Значения r всегда лежат в диапазоне [–1,1]: $-1 \le r \le 1$. Чем ближе r к 1, тем больше зависимость друг от друга массивов w и p. Если r = 0, то массивы w и p — некоррелированы, но при этом между ними может быть не линейная, а другая зависимость.

Приведем пример расчета.

1. Пусть был произведен опрос части студентов о качестве работы студенческой столовой, оцениваемой по пятибалльной шкале. В результате этого появился массив (смотри задание 10):

X_i = 3 3 4 5 2 5 3 4 3 4 i=1..10

Для этой выборки:

M=3,6 S=0,966 V=0,268 D_0=16,973%

Погрешность D_0 получилась больше 10%, то есть эту выборку нельзя распространить на всю генеральную совокупность.

Задание 10.1.

1) Подберите числа в выборке X_i для примера об опросе студентов такие, чтобы погрешность D_0 стала меньше 10%, тогда мнение этой части студентов можно будет считать мнением всех студентов.

Постройте линейную регрессию $y=a\cdot x+b$ для массивов:

z_i	0	0,2	0,4	06	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4
y_i	064	0,69	0,71	0,62	0,51	0,47	0,24	0,07	–0,07	–0,17

Получим: a = –0,688 b = 0,866

Суммарное отклонение dd = 0,163.

Измените y_i так, чтобы отклонение dd стало меньше 0,1, то есть зависимость между z и y стала более линейной.

Задание 10.2.

2) Пусть был проведен опрос мнения студентов (массив w) и преподавателей (массив p) о чистоте классов института. Чистота оценивалась по 10-ти балльной системе за 10 месяцев.

w_i	5	10	9	7	10	8	7	10	5	3
p_i	7	8	8	6	10	9	9	9	7	6

Для этих данных получаем коэффициент корреляции: r =0,739, то есть мнение студентов не очень совпадает с мнением преподавателей.

Измените массивы w_i и p_i так, чтобы:

а) мнения совпадали, $0,9<r<1$;

б) мнения не совпадали, $0,1<r<0,2$.

10.1. Методика вычисления статистических величин с использованием встроенных в Mathcad функций

Для вычисления статистических величин и величин теории вероятности в MathCad предусмотрены следующие встроенные функции:

mean(x) — математическое ожидание массива x;
stdev(x) — стандартное отклонение элементов массива x;
var(x) — дисперсия элементов массива x;
corr(w, p) — коэффициент корреляции двух массивов w и p;
intercept(z, y) — коэффициент b линейной регрессии $y=a\cdot x+b;$
slope(z, y)— коэффициент a линейной регрессии $y=a\cdot x+b;$
rnd(x) — псевдослучайное число в диапазоне от 0 до x.

Задание 10.3.

Заданы массивы случайных чисел: x, z, y, w, p.
ORIGIN:=1
n:=10

$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad z := \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 1.0 \\ 1.2 \\ 1.4 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.69 \\ 0.71 \\ 0.62 \\ 0.51 \\ 0.47 \\ 0.24 \\ 0.07 \\ -0.07 \\ -0.17 \end{bmatrix} \quad w := \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad p := \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Найдем:

1) математическое ожидание

$$M := \frac{1}{n}\sum_{i=1} x_i$$

$$M=3.6$$

2) среднеквадратичное отклонение

$$S := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\right)^2}{n-1}}$$

$$S=0.966$$

3) коэффициент вариации

$$V := \frac{S}{M} \qquad V=0.268$$

4) погрешность выборки

$$DO := 2\frac{V}{\sqrt{n}}100 \qquad DO=16.973$$

5) коэффициенты линейной регрессии y=a·x+b

$$mz := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \qquad my := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$mzy := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i y_i \qquad mz2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (z_i)^2$$

$$M := \begin{bmatrix} mz2 & mz \\ mz & 1 \end{bmatrix} \qquad MO := \begin{bmatrix} mzy \\ my \end{bmatrix}$$

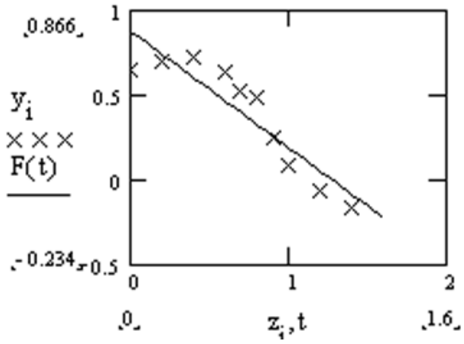
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := M^{-1} \cdot MO$$

a=-0.688 b=0.866

i:=1..n t:=0,0.1..1.6

F(t):=a·t+b

Получим график регрессии



Отклонение регрессии

$$dd := \sum_{i=1}^{n} (y_i - az_i - b)^2$$

dd=0.163

6) коэффициент корреляции между массивами w и p

$$mw := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad mp := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

$$r := \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \left[(w_i - mw)\cdot(p_i - mp)\right]\right]}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} (w_i - mw)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (p_i - mp)^2\right]}}$$

r=0.739

Использование встроенных функций:

– математическое ожидание массива x	M2:=mean(x)	M2 = 3.6
– дисперсия массива x	D2:=var(x)	D2 = 0.84
– стандартное отклонение массива x	S2:=stdev(x)	S2 = 0.917
– коэффициент a линейной регрессии	a2:=slope(z, y)	a2= –0.688
– коэффициент b линейной регрессии	b2:=intercept(z, y)	b2 = 0.866
– коэффициент корреляции между массивами w и p	r2:=corr(w, p)	r2 = 0.739.

11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Решение многих задач сводится к вычислению значений функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций. Точное решение данных задач часто оказывается невозможным. В этом случае можно получить решение с заданной точностью при помощи рядов. При сходящемся ряде можно ограничится несколькими его первыми членами.

11.1. Признаки сходимости рядов

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (11.1)$$

где a_1, a_2, …, a_n — члены ряда, образующие числовую последовательность.

Числовой ряд (11.1) называется сходящимся, если сумма первых n его членов $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ при $n \to \infty$ имеет предел.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся.

Ряд может сходиться лишь при условии, когда общий член ряда a_n при $n \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (11.2)$$

Это условие необходимо, но не достаточно.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Для рядов с положительными членами $a_n>0$ существует несколько достаточных признаков сходимости.

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Проверить выполнение необходимого признака сходимости для рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{8} + \ldots$

Найдем предел для a_n:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$, то есть ряд расходится;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} = 1 + \frac{4}{5} + \frac{6}{10} + \ldots$

Найдем предел для a_n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2+1} = \lim \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} = 0,$$

то есть ряд может сходиться или нет, что надо проверить другими признаками.

Интегральный признак сходимости Коши

Ряд с положительными убывающими членами $a_n = f(n)$ сходится или расходится, если сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \qquad (11.3)$$

где f(x) — непрерывно убывающая функция.

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Исследовать сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$

Найдем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim(\ln(x^2+1))\Big|_1^{\beta}=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty$$

Интеграл расходится, значит, расходится и ряд.

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^3(n)}$

Найдем несобственный интеграл:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^3(x)}dx=\lim_{\beta\to\infty}\int_2^{\beta}(\ln(x))^{-3}\cdot d(\ln(x))=\lim-\left(\frac{1}{2\cdot\ln^2(x)}\right)\Bigg|_2^{\beta}=$$

$$=\lim\left(\frac{1}{2\cdot\ln^2(2)}-\frac{1}{2\cdot\ln^2(\beta)}\right)=\frac{1}{2\cdot\ln^2(2)}$$

Интеграл сходится, значит, сходится и ряд.

Признак сходимости Даламбера

Если ряд с положительными членами a_1, …, a_n сравнить с другим рядом b_1, …, b_n, сходимость или расходимость которого известна, то:

1) если при некоторых $a_n \le b_n$ ряд b расходится, то расходится и ряд a.

2) если при некоторых $a_n \ge b_n$ ряд b расходится, то расходится и ряд a.

Можно в качестве ряда b использовать геометрическую прогрессию

$$1+q+q^2+q^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\qquad q>0 \tag{11.4}$$

которая при q<1 сходится, а при q≥1 — расходится.

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Исследовать сходимость рядов

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$

Найдем n-й и (n+1)-й члены ряда и предел их отношения при n→∞:

$$a_n=\frac{n^5}{2^n}\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$$

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}<1$$

Ряд сходится, так как p<1.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

Найдем n-й и (n+1)-й члены ряда и предел их отношения при n→∞:

$$a_n=\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}\qquad a_{n+1}=\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$$

$p=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{3^{2n+3}\cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\cdot 3^{2n+1}}=\frac{9}{8}>1$ Ряд расходится, так как p>1.

11.2. Знакочередующие ряды

Знакочередующийся ряд (с членами разных знаков) имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots \pm a_n . \tag{11.5}$$

Он называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \tag{11.6}$$

и называется неабсолютно сходящимся, если ряд (11.6) расходящийся.

По признаку Лейбница знакочередующийся ряд сходится, если выполняются два условия:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \text{ и предел } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{11.7}$$

Приведем пример проверки сходимости ряда.

Исследовать сходимость ряда по Лейбницу и вычислить его сумму с точностью 0,01.

$$S_n = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

Члены ряда убывают: $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{9}$, $a_3 = -\frac{1}{28}$, $a_4 = \frac{1}{65}$, $a_5 = -\frac{1}{126}$;

предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$, значит, ряд сходится.

Сумма с точностью $\frac{1}{126} < 0{,}01$ может быть вычислена при взятии всего 4-х членов ряда:

$$S_n \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0.41 .$$

11.3. Функциональные и степенные ряды

Ряд, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots , \tag{11.8}$$

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются степенные ряды вида:

$$\sum_{n=}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots \tag{11.9}$$

или общего вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots \tag{11.10}$$

Для определения области сходимости функциональных рядов, обычно, в начале используется признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда, исследуются другими признаками сходимости.

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Определить интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$.

Применим признак Даламбера:

$$U_n=\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} \qquad U_{n+1}=\frac{(-x)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}$$

$$P=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim\left|\frac{x^{n+1}\cdot 3^{n-1}\cdot\sqrt{n}}{3^n\cdot\sqrt{n+1}\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{3}\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{|x|}{3}$$

1) $P<1$ при $\frac{|x|}{3}<1$, то есть при $|x|<3$ или при $-3<x<3$;

2) $P>1$ при $\frac{|x|}{3}>1$, то есть при $|x|>3$ или при $x>3$ и $x<-3$;

3) $P = 1$ — особые точки, для которых признак сходимости Даламбера не дает ответа о сходимости.

При $x = -3$ получим числовой ряд $\sum\frac{3}{\sqrt{n}}$, который расходится.

При $x=3$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum(-1)^n\frac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится.

Окончательно, в соответствии с вышеприведенными пунктами 1, 2, 3: интервалом сходимости будет являться полуоткрытый интервал $-3<x\le 3$.

11.4. Ряды Тейлора

Рядом Тейлора для функции f(x) в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена (x-a) вида:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots, \qquad (11.11)$$

где f', f'', …, f^n- производные n-го порядка.

Ряд будет сходиться только при тех значениях x, при которых остаточный член R_n формулы Тейлора при $n\to\infty$ стремится к нулю $\lim_{n\to\infty}R_n=0$.

При a=0 ряд Тейлора есть степенной ряд относительно x и называется рядом Маклорена:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (11.12)$$

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Разложить в ряд Маклорена функции sin(x) и cos(x).

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

При разложении необходимо:

1) написать ряд Тейлора (Маклорена) для f(x), то есть вычислить ее значения и значения ее производных при x=a и подставить в (11.11) или (11.12);

2) исследовать остаточный член R_n для f(x) и определить совокупность значений x, при которых ряд сходится к данной функции (то есть при которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$).

Для f(x)=sin(x):

f(x)=sin(x)→f(0)=0

$$f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \to f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}) \to f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos(x) = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}) \to f'''(0) = -1$$

…

$$f^k(x) = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2}) \to f^k(0) = \sin(k \cdot \frac{\pi}{2}).$$

Так как четные производные равны нулю, то ряд содержит только нечетные степени.

11.5. Методика применения рядов в приближенных вычислениях

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения). При этом интервалом сходимости полученного ряда будет совокупность точек, где сходятся одновременно оба ряда. Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать.

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Найти разложение в ряд функций:

1) $$(1+x)\cdot e^x = (1+x)\cdot\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=$$

$$=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^4+\ldots+\frac{n+1}{n!}x^n+\ldots$$

2) $$\sin^2(x) = \sin(x)\cdot\sin(x) = \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right) = x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}\cdot x^6+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{2n!}x^{2n}+\ldots$$

Приведем примеры проверки сходимости рядов.

Вычислить:

1) ln(1,1)

Возьмем знакочередующийся ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

При x=0,1 получим $\ln(1{,}1) = 0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} \approx 0{,}0953$.

2) $\sqrt[4]{17}$

Преобразуем $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Возьмем биноминальный ряд, полагая $x = \frac{1}{16}$ и $m = \frac{1}{4}$.

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$$

Тогда:

$$2\left((1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left(1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-...\right)$$

a_1=1 a_2=0,01562 a_3=-0,00037 a_4=0,00001

Если ограничится тремя членами ряда, то $\sqrt[4]{17}\approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037)\approx 2{,}0305$.

3) $\operatorname{arctg}(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Разлагая в ряд Маклорена и почленно интегрируя, получим: $\frac{1}{1+t^2}=(1+t^2)^{-1}$.

При x=t^2 и m= –1 разложим в биноминальный ряд:

$$(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-t^6+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$$

4) $I=\int\limits_0^1 \cos(\sqrt{x})dx$

Запишем ряд Маклорена, заменяя x на $\sqrt{x}$:

$$\cos\left(\sqrt{x}\right)=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-...$$

$$I=\int\limits_0^1 \cos(\sqrt{x})dx=x-\frac{x^2}{2!\cdot 2}+\frac{x^3}{4!\cdot 3}-\frac{x^4}{6!\cdot 4}+\frac{x^5}{8!\cdot 5}-...=1-\frac{1}{2!\cdot 2}+\frac{1}{4!\cdot 3}-\frac{1}{6!\cdot 4}+\frac{1}{8!\cdot 5}-...$$

Если ограничится четырьмя членами ряда, то $I=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}\approx 0{,}7635$.

5) $\sin(x^2)$

Заменим x на x^2 в ряде для sin(x):

$$\sin(x^2)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+...$$

Если ограничится четырьмя членами ряда, то $\sin(x^2)\approx 0{,}2474$.

Задание 11.1.

Вычислить функции с помощью рядов. Осуществить решение в MathCad.

1) Найти sin(x).

m:=7 x:=1

g1:=sin(x)

Разложение в ряд происходит по формуле $g2:=\sum\limits_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

Для четырех членов ряд выглядит следующим образом $g=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$

g1=0.8414709848 — точное решение;

g2=0.8414709848 — приближенное решение.

2) Найти cos(x).

m:=7 x:=1

k1:=cos(x)

Разложение в ряд происходит по формуле $k2:=1+\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2\cdot n)!}$.

Для четырех членов ряд выглядит следующим образом $k = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$.

k1=0.5403023059 — точное решение;
k2=0.5403023059 — приближенное решение.

3) Найти e^x.
m:=7 x:=1
L1:= e^x

Разложение в ряд происходит по формуле $L2 := 1 + \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n!}$.

Для пяти членов ряд выглядит следующим образом: $L = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

L1=2.7182818285 — точное решение;
L2=2.7182539683 — приближенное решение.

4) Найти ln(1+x).
m:=7 x:=0.1
a1:=ln(1+x)

Разложение в ряд происходит по формуле $a2 := \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Для четырех членов ряд выглядит следующим образом: $a = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

a1=0.0953101798 — точное решение;
a2=0.095310181 — приближенное решение.

5) Найти $\sqrt[4]{17}$

Преобразуем $\sqrt[4]{17} = 2 \cdot \sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{16}\right)}$.

Тогда разложение в ряд происходит по формуле:

$$b2 = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 8 \cdot 12} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{13}\right).$$

b1:= $\sqrt[4]{17}$
b1=2.0305432 — точное решение;
b2=2.03054428 — приближенное решение.

6) Найти arctg(x).
m:=9 x:=0.5
c1:=atan(x)

Разложение в ряд происходит по формуле $c2 := \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$.

Для четырех членов ряд выглядит следующим образом: $c = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$.

c1=0.463647609 — точное решение;
c2=0.4636475905 — приближенное решение.

7) Найти $\int_0^1 \cos(\sqrt{x})dx$.

x:=1

$$d1 := \int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$$

Разложение в ряд происходит по формуле:

$$d2 := x - \frac{x}{(2!\cdot 2)} + \frac{x}{(4!\cdot 3)} - \frac{x}{(6!\cdot 4)} + \frac{x}{(8!\cdot 5)}.$$

d1=0.7635465814 — точное решение;

d2= 0.763546627 — приближенное решение.

8) Найти $\sin(x)^2$.

m:=7 x:=0.5

o1:=$\sin(x)^2$

Разложение в ряд происходит по формуле $o2 := \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}$.

Для четырех членов ряд выглядит следующим образом:

$$o = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!}.$$

o1=0.2298488471 — точное решение;

o2= 0.2474039593 — приближенное решение.

9) Изменить число членов ряда m = 1, 2, 3, 4, 5. Посмотреть сколько членов ряда достаточно, чтобы погрешность была $\varepsilon \le 0{,}001$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

1. Исследовать по интегральному признаку сходимость рядов.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ (нет)	2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ (да)
3) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n^4-9}$ (да)	4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt{n}}$ (да)
5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (да)	6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ (нет)
7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$ (нет)	8) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^2(n)}$ (да)

2. Проделать задание 11.1 при m=1, 2, 3, 4. Определить сколько членов ряда необходимо взять, чтобы получить погрешность по сравнению с точным значением $\varepsilon < 0{,}001$.

$$\varepsilon = \frac{\xi - \xi_{\text{точн}}}{\xi_{\text{точн}}}.$$

3. Исследовать по признаку Даламбера сходимость рядов.

9) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{5^n}$ (нет)	10) $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$ (да)
11) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ (да)	12) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$ (нет)
13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{2n!}$ (да)	14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$ (да)
15) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{2^n}$ (да)	16) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ (нет)

4. Проделать задание 11.1, принимая значения x согласно варианту из таблицы.

Функция \ Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8
sin(x)	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
cos(x)	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
e^x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
ln(1+x)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\sqrt[4]{17}$	-	-	-	-	-	-	-	-
arctg(x)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right)dx$	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$\sin(x)^2$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8

12. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Матрицы применяются во многих областях науки и техники. Матрицами называют двухмерные массивы, состоящие из m строк и n столбцов. Выражения a_{ij} называются элементами матрицы A, где i — номер строки, j — номер столбца матрицы. При m=1 получим строчную матрицу, при n=1 — столбцовую матрицу, которые описывают одномерные массивы. Иногда одномерные массивы называют векторами.

При m=n получаем квадратную матрицу. Квадратная матрица называется:

– *верхней треугольной матрицей*, если $a_{ik}=0$, для всех $i>k$;

– *нижней треугольной матрицей*, если $a_{ik}=0$, для всех $i<k$;

– *диагональной матрицей*, если $a_{ik}=0$ для всех $i\neq k$;

– *единичной матрицей*, если $a_{ij}=\begin{cases}0 & \text{для } i\neq k\\ 1 & \text{для } i=k\end{cases}$;

– *нулевой матрицей*, если $a_{ik}=0$, для всех i и k.

Если элементы строк матрицы A расставлены в столбцы (при этом одновременно элементы столбцов расставляются в строки), то полученная матрица называется *транспонированной* к A и обозначается A^T, т.е. $a_{ik}^T=a_{ki}$.

Сумма диагональных элементов называется *следом* матрицы — $Sp(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

Определителем матрицы A называется число $D=\det(A)=\sum_{n}(-1)^{j(\pi)}\cdot a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}$, причем сумма должна быть распространена на все перестановки n набора чисел 1, 2, …n. Иногда определитель обозначается как $|A|$.

Для матрицы размером 2×2 $\left(A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\right)$ определитель $|A|=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.

Для матрицы размером 3×3 $\left(A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)$ определитель вычисляется по формуле: $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$.

Если $|A|\neq 0$, то матрица называется *невырожденной*. И наоборот, если $|A|=0$, то матрица называется *вырожденной* и она не имеет обратной матрицы.

Рангом матрицы rang(A) является максимальное число линейно независимых вектор-строк матрицы A.

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковый размер и равны все их элементы, стоящие на одних и тех же местах: $a_{ij}=b_{ij}$.

Суммой матриц A и B одинакового размера является матрица C с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Разницей матриц A и B одинакового размера является матрица C с элементами $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Произведением двух матриц A и B является матрица C с элементами $c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$, при этом число строк в матрице A должно равняться числу столбцов в матрице B. В общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Произведение матрицы A на число λ является матрица с элементами $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$. То есть умножение матрицы на число происходит поэлементно. Деление матрицы на число λ тоже происходит поэлементно: $c_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{\lambda}$.

Умножение квадратной матрицы А на единичную матрицу Е не изменяет результат:

$$A \cdot E = A\, E \cdot A = A.$$

Сложение и умножение матриц связано *дистрибутивным* законом:

$$(A+B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$$

$$D \cdot (A+B) = D \cdot A + D \cdot B.$$

Для квадратных матриц А и В одинакового размера определитель $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Для транспонированных матриц выполняется равенство $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Обратной квадратной матрицей A^{-1} называется такая матрица, умножение которой на прямую матрицу А дает единичную матрицу Е, то есть $A \cdot A^{-1} = E$ или $A^{-1} \cdot A = E$. Если А — вырожденная матрица, то обратная матрица A^{-1} не существует.

Для обратных матриц справедливо:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Решение системы линейных уравнений можно получить путем обращения матрицы. Пусть есть система: $A \cdot X = B$. Тогда решение находится по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Квадратная матрица А называется:

– *симметрической*, если $A^T = A$;

– *кососимметрической*, если $A^T = -A$;

– *ортогональной*, если А не вырождена и $A^T = A^{-1}$.

Пусть А — квадратная матрица с комплексными элементами. $\overline{A}$ — матрица, комплексно сопряженная к А, то есть полученная из А заменой ее элементов на комплексно сопряженные. Матрица А называется:

– *эрмитовой*, если $A^T = \overline{A}$;

– *косоэрмтовой*, если $A^T = -\overline{A}$;

– *унитарной*, если А не вырождена и $A^T = \overline{A}^{-1}$.

Для квадратной матрицы А справедливо:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Одним из способов решения систем линейных уравнений является способ, при котором исходную матрицу А приводят к треугольной матрице В:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

а затем обратным ходом находят неизвестные.

При помощи специальных матриц преобразований S можно вычислять любые функции от исходной матрицы А. Например, sin(A), ln(A), $\sqrt{A}$. Для этого необходимо найти собственные значения и собственные вектора А.

Для квадратной матрицы А вектор, для которого $A \cdot X = \lambda \cdot X$ (где λ — некоторое число) называется *собственным вектором* А, а λ — принадлежащим ему *собственным значением* матрицы А.

Уравнение $A \cdot X = \lambda \cdot X$ эквивалентно уравнению $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot X = 0$. Оно имеет нетривиальное решение, когда $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ — это характеристическое уравнение матрицы А. То есть каждому собственному значению λ_I соответствует собственный вектор L_i. Из собственных векторов L_i составляют матрицу преобразований $S=[L_1, L_2, \ldots, L_n]$, которая может диагонализировать исходную матрицу А, то есть $Ag = S \cdot A \cdot S^{-1}$.

12.1. Методика использования матричных выражений в системе MathCAD

Пусть имеется матрица $G = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Найдем собственные значения:

$$\det(G - \lambda \cdot E) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 5 = 0.$$

Отсюда λ_1=5, λ_2= –1.

Найдем первый собственный вектор:

$$(G - \lambda_1 \cdot E) \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = 0.$$

Отсюда $L_1 = M\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, где M — любое число.

Найдем второй собственный вектор $(G - \lambda_2 \cdot E) \cdot X = 0$,

отсюда $L_2 = M\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Тогда матрица преобразований при M=1 равна:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Найдем какую-нибудь функцию от матрицы G:

а) Найдем $G_k = \sqrt{G}$.

$G_s = S^{-1} \cdot G \cdot S = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$Gf_{ij} = \sqrt{G_{s_{ij}}}$

$G_k = S \cdot Gf \cdot S^{-1}$

$G_k \begin{bmatrix} 1.491 + j \cdot 0.333 & -0.745 + j \cdot 0.333 \\ -1.491 + j \cdot 0.667 & 0.745 + j \cdot 0.667 \end{bmatrix}$

Все действия с матрицами, описанные выше, реализованные в MathCad и представлены в задании 12.1.

Задание 12.1.

Операции с матрицами в системе MathCad.

Зададим матрицы:

ORIGIN:=1

$M := \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad V := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

Найдем сумму M и B:

$M + B = \begin{bmatrix} 14 & 3 & 6 \\ 4 & 15 & 11 \\ 8 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

Найдем разницу M и B:

$M - B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Разделим M на 3:

$$\frac{1}{3}\cdot M = \begin{bmatrix} 3 & 0.667 & 1 \\ 0.667 & 3 & 2.333 \\ 1 & 2.333 & 3 \end{bmatrix}$$

Найдем произведения M·B и B·M:

$$\mathrm{M}\cdot\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 64 & 24 & 56 \\ 63 & 63 & 91 \\ 74 & 54 & 100 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B}\cdot\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 56 & 40 & 49 \\ 42 & 86 & 84 \\ 68 & 68 & 85 \end{bmatrix}$$

Найдем произведение матрицы M на вектор V:

$$\mathrm{M}\cdot\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 54 \\ 44 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Выделим элементы матриц M и B и вектора V:

$M_{1,2}=2$ $B_{2,3}=4$ $V_2=3$ $V_3=1$

Выделим из матрицы M блок, состоящий из строк от 1 до 2 и столбцов от 2 до 3:

$$\mathrm{submatrix}(\mathrm{M},1,2,2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Выделим из матрицы M первый столбец:

$M1:=M^{<1>}$

$$\mathrm{M1} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Зададим матрицу, в которой (i,j)-й элемент содержит функцию F(i,j), где i=0, 1, …, m_i, j=0, 1, …, m_j (данный пример нельзя реализовать в MathCAD6.0):

mi:=3   mj:=2   i:=0..mi   j:=0..mj   F(i,j):=i+j

$$\mathrm{matrix}(\mathrm{mi},\mathrm{mj},\mathrm{F}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Объединим матрицы M и B, расположив их рядом:

h1:=augment(M, B)

$$\mathrm{h1} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 7 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Объединим матрицы M и B, расположив их друг под другом:

h2:=stack(M, B)

$$\mathrm{h2} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Максимальный элемент матрицы A:
max(A)=9.
Минимальный элемент матрицы A:
min(A)=2.
Среднее значение вектора V:
mean(V)=3.
Зададим единичную матрицу E:
$n := 3$
E:=identity(n)

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Индекс последнего элемента вектора V:
last(V)=3
Число элементов вектора V:
length(V)=3
Число строк в матрице A:
rows(A)=3
След матрицы M:
tr(M)=27
Определитель матрицы M:
|M|=255
Обратная матрица:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.012 & -0.051 \\ 0.012 & 0.282 & -0.224 \\ -0.051 & -0.224 & 0.302 \end{bmatrix}$$

Транспонированная матрица:

$$M^{T} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Ранг матрицы (данный пример нельзя реализовать в MathCAD6.0):
rank(M)=3
Ступенчатый вид матриц M и A (данный пример нельзя реализовать в MathCAD6.0):

$$\mathrm{rref}(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Собственные значения матрицы M:
L:=eigenvals(M)

$$L = \begin{bmatrix} 7.601 \\ 1.919 \\ 17.48 \end{bmatrix}$$

V_1, V_2, V_3 — нормированные собственные вектора матрицы M, соответствующие ее собственным значениям L_1, L_2, L_3:

V1:=eigenvec(M, L_1)   V2:=eigenvec(M, L_2)   V3:=eigenvec(M, L_3)

$$V1 = \begin{bmatrix} -0.915 \\ 0.354 \\ 0.191 \end{bmatrix} \quad V2 = \begin{bmatrix} -0.113 \\ -0.682 \\ 0.722 \end{bmatrix} \quad V3 = \begin{bmatrix} 0.386 \\ 0.64 \\ 0.665 \end{bmatrix}$$

Пусть задана матрица g:

$$g := \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем корень квадратный из этой матрицы.
Матрица преобразований и обратная ей матрица равны:

$$s := \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad s^{-1} = \begin{bmatrix} -0.667 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица gs равна:

$$gs := s^{-1} \cdot g \cdot s$$

$$gs = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Извлечем корень квадратный из диагональных элементов:

$$gf_{1,1} := \sqrt{gs_{1,1}} \qquad gf_{2,2} := \sqrt{gs_{2,2}} \qquad gf_{1,2} := 0 \qquad gf_{2,1} := 0$$

Найдем матрицу $gk = \sqrt{g}$:

$$gk := s \cdot gf \cdot s^{-1}$$

$$gk = \begin{bmatrix} 1.491 + 0.333i & -0.745 + 0.333i \\ -1.491 + 0.667i & 0.745 + 0.667i \end{bmatrix}$$

ВОПРОСЫ К ЗАЧЁТУ

1. Интерполирование функции. Многочлены по числу «n»-точек функции.
2. Интерполирование функции. Многочлен Лагранжа.
3. Интерполирование функции. Многочлен Ньютона. 1-я и 2-я формулы Ньютона.
4. Интерполирование функции. Уплотнение (субтабулирование) таблиц, формулы Ньютона.
5. Интерполирование функции. Сплайн интерполяция.
6. Интерполирование функции. Кубический сплайн.
7. Обработка экспериментальных данных. Метод наименьших квадратов при линейной интерполирующей функции.
8. Обработка экспериментальных данных. Метод наименьших квадратов при квадратной интерполирующей функции.
9. Решение нелинейных уравнений с одной переменной. Какие два этапа?
10. Решение нелинейных уравнений с одной переменной. Поиск корня методом половинного деления.
11. Решение нелинейных уравнений с одной переменной. Поиск корня методом простой итерации.
12. Решение системы линейных уравнений. Метод обращения матрицы.
13. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
14. Решение системы линейных уравнений. Метод Гаусса-Зейделя.
15. Решение системы нелинейных уравнений. Метод простой итерации. На примере двух уравнений.
16. Линейное программирование. Постановка задачи. Преобразование к первому базисному решению.
17. Линейное программирование. Решение симплекс-методом.
18. Поиск минимума функции одной переменной. Постановка задачи. Какие два этапа?
19. Поиск минимума функции одной переменной. Метод половинного решения.
20. Поиск минимума функции одной переменной. Метод сканирования.
21. Поиск минимума функции нескольких переменных. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация в двухмерном случае.
22. Поиск минимума функции нескольких переменных. Метод «покоординатного спуска».
23. Поиск минимума функции нескольких переменных. Метод «скорейшего спуска».
24. Решение обыкновенных дифференцированных уравнений первого порядка. Задача Коши (постановка задачи).
25. Решение обыкновенных дифференцированных уравнений первого порядка. Метод Пикара.
26. Решение обыкновенных дифференцированных уравнений первого порядка. Метод Эйлера.
27. Решение обыкновенных дифференцированных уравнений первого порядка. Метод Эйлера-Коши.
28. Решение обыкновенных дифференцированных уравнений первого порядка. Метод Рунге-Кутта.
29. Уравнение в частных производных. Постановка задачи. Разностная схема решения задачи.
30. Математическая статистика. Понятия генеральной совокупности и выборки.
31. Математическая статистика. Формулы вычисления математического ожидания, среднеквадратического отклонения и коэффициента вариации.
32. Математическая статистика. Распределения. Эмпирическое (статистическое) распределение.
33. Математическая статистика. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.
34. Математическая статистика. Биноминальное распределение.
35. Математическая статистика. Распределение Пуассона.
36. Математическая статистика. Плотность распределения и интегральная функция непрерывной случайной величины.
37. Математическая статистика. Непрерывное распределение. Нормальный закон.
38. Математическая статистика. Проверка статистических гипотез (основная и альтернативная гипотеза).
39. Математическая статистика. Корреляция и регрессия между случайными величинами.
40. Ряды. Признаки сходимости и расходимости ряда. (Даламбера, Коши).
41. Ряды. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда.
42. Ряды. Функциональные ряды.
43. Ряды. Степенные ряды.
44. Ряды. Ряд Тейлора и ряд Маклорена.
45. Ряды. Применение рядов для приближенных вычислений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ларионов А.И. Математические методы линейного программирования. — М: Высшая школа, 1991.

2. Заварыгин В.М. и др. Численные методы. — М: Просвещение, 1991.

3. Реклейтис и др. Оптимизация в технике. — М: Мир, 1986.

4. Ракитин В.И. и др. Практическое руководство по методам вычислений (с приложением программ для персональных компьютеров). — Москва, 1998.

5. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование. — М: Высшая школа, 1976.

6. Демидович А.А. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М: Высшая школа, 1990.

7. Сергованцев В.Т. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. — М: Финансы и статистика, 1988.

8. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. — М: Высшая школа, 1966.